ТОМ 25, №1, 2025 eISSN 2687-1653
РЕЦЕНЗИРУЕМЫЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)

Механика / Mechanics

Машиностроение и машиноведение / Machine Buiding and Machine Science

Информатика, вычислительная техника и управление / Information Technology, Computer Science and Management



www.vestnik-donstu.ru
DOI 10.23947/2687-1653



Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)

Рецензируемый научно-практический журнал

eISSN 2687–1653

Издается с 2000 года

Периодичность – 4 выпуска в год

DOI: 10.23947/2687–1653

Учредитель и издатель — Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет» (ДГТУ), г. Ростов-на-Дону

Создан в целях информирования читательской аудитории о новейших достижениях и перспективах в области механики, машиностроения, информатики и вычислительной техники. Издание является форумом для сотрудничества российских и иностранных ученых, способствует сближению российского и мирового научно-информационного пространства.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в котором должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (Перечень ВАК) по следующим научным специальностям:

1.1.7 – Теоретическая механика, динамика машин (технические науки)
1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела (технические, физико-математические науки)
1.1.9 – Механика жидкости, газа и плазмы (технические науки)
1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки)
2.3.1 – Системный анализ, управление и обработка информации, статистика (технические науки)
2.3.3 – Автоматизация и управление технологическими процессами и производствами (технические науки)
2.3.5 – Математическое и программное обеспечение вычислительных систем, комплексов и компьютерных сетей (технические науки)
2.3.7 – Компьютерное моделирование и автоматизация проектирования (технические, физико-математические науки)
2.3.8 – Информатика и информационные процессы (технические науки)
2.5.2 – Машиноведение (технические науки)
2.5.3 – Трение и износ в машинах (технические науки)
2.5.5 – Технология и оборудование механической и физико-технической обработки (технические науки)
2.5.6 – Технология машиностроения (технические науки)
2.5.8 – Сварка, родственные процессы и технологии (технические науки)
2.5.9 – Методы и приборы контроля и диагностики материалов, изделий, веществ и природной среды (технические науки)
2.5.10 – Гидравлические машины, вакуумная, компрессорная техника, гидро- и пневмосистемы (технические науки)

Регистрация	Выписка из реестра зарегистрированных средств массовой информации ЭЛ № ФС 77 – 78854 от 07 августа 2020 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций
Индексация и архивация	РИНЦ, CyberLeninka, CrossRef, Dimensions, DOAJ, EBSCO, Index Copernicus, Internet Archive, Google Scholar
Сайт	http://vestnik-donstu.ru
Адрес редакции	344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1
E-mail	vestnik@donstu.ru
Телефон	+7 (863) 2–738–372
Дата выхода №1,2025 в свет	30.03.2025





Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)

Peer-reviewed scientific and practical journal

eISSN 2687–1653

Published since 2000

Periodicity – 4 issues per year

DOI: 10.23947/2687–1653

Founder and Publisher — Don State Technical University (DSTU), Rostov-on-Don, Russian Federation

The journal is aimed at informing the readership about the latest achievements and prospects in the field of mechanics, mechanical engineering, computer science and computer technology. The publication is a forum for cooperation between Russian and foreign scientists, it contributes to the convergence of the Russian and world scientific and information space.

The journal is included in the List of the leading peer-reviewed scientific publications (Higher Attestation Commission under the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation), where basic scientific results of dissertations for the degrees of Doctor and Candidate of Science in scientific specialties and their respective branches of science should be published.

The journal publishes articles in the following fields of science:

– Theoretical Mechanics, Dynamics of Machines (Engineering Sciences)
– Deformable Solid Mechanics (Engineering, Physical and Mathematical Sciences)
– Mechanics of Liquid, Gas and Plasma (Engineering Sciences)
– Mathematical Simulation, Numerical Methods and Program Systems (Engineering Sciences)
– System Analysis, Information Management and Processing, Statistics (Engineering Sciences)
– Automation and Control of Technological Processes and Productions (Engineering Sciences)
– Software and Mathematical Support of Machines, Complexes and Computer Networks (Engineering Sciences)
– Computer Modeling and Design Automation (Engineering, Physical and Mathematical Sciences)
– Computer Science and Information Processes (Engineering Sciences)
– Machine Science (Engineering Sciences)
– Machine Friction and Wear (Engineering Sciences)
– Technology and Equipment of Mechanical and Physicotechnical Processing (Engineering Sciences)
– Engineering Technology (Engineering Sciences)
– Welding, Allied Processes and Technologies (Engineering Sciences)
– Methods and Devices for Monitoring and Diagnostics of Materials, Products, Substances and the Natural Environment (Engineering Sciences)
– Hydraulic Machines, Vacuum, Compressor Equipment, Hydraulic and Pneumatic Systems (Engineering Sciences)

Registration	Extract from the Register of Registered Mass Media ЭЛ № ФС 77 – 78854 dated August 07, 2020, issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media
Indexing and Archiving	RISC, CyberLeninka, CrossRef, Dimensions, DOAJ, EBSCO, Index Copernicus, Internet Archive, Google Scholar
Website	http://vestnik-donstu.ru
Address of the Editorial Office	1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation
E-mail	vestnik@donstu.ru
Telephone	+7 (863) 2–738–372
Date of Publication No.1,2025	30.03.2025



Редакционная коллегия

Содержание

Contents

МЕХАНИКА
MECHANICS





УДК 531.46 *Оригинальное эмпирическое исследование*
https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-7-13

Динамика плоского твердого тела на горизонтальной плоскости



EDN: ATOYXO

А.И. Муницын, **В.Э. Цой** ✉
Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва, Российская Федерация
✉ tsoyve@mpei.ru

Аннотация

Введение. Исследование движения твердого тела, несущего подвижные массы, значительно упрощает проектирование капсульных роботов, которые могут перемещаться внутри агрессивных сред и выполнять необходимые операции. Достаточно хорошо изучены случаи: движения при взаимодействии твердого тела с опорной плоскостью и в агрессивных средах; вибрационного перемещения сыпучих сред и твердых тел на вибрирующем основании; оптимизации движения твердых тел; варьирования средней скорости и ускорения на различных интервалах движения; зависимости средней скорости от параметров задачи; управления скоростью перемещения внутренней массы для наискорейшего поворота твердого тела. Однако в настоящее время в литературе уделено недостаточно внимания задачам исследования движения тяжелого плоского тела по горизонтальной плоскости под действием гармонической силы, направленной под углом к горизонту, особенно в плане учета всех возможных режимов движения и их особенностей. Это не позволяет определять оптимальные параметры задачи. Поэтому целью данной работы стало выявление особенностей всех возможных режимов движения тяжелого твердого тела по горизонтальной плоскости под действием гармонической силы, направленной под углом к горизонту.

Материалы и методы. В работе использовали уравнения движения механической системы. Для решения стационарных уравнений движения системы применялись как аналитические подходы, так и численные методы. В качестве модели трения была принята модель сухого трения, что позволило получить точные решения для положительного и отрицательного значения скорости проскальзывания с точностью до констант. Значения этих констант определялись из условий стыковки и периодичности решения.

Результаты исследования. Получено аналитическое решение задачи для периодических решений. Выявлены три возможных режима движения. С помощью численного анализа построены зависимости средней за период скорости движения тела от угла наклона силы к горизонту. Установлено оптимальное направление силы.

Обсуждение и заключение. Результаты проведенных исследований позволяют определить оптимальные значения параметров задачи для достижения необходимого значения средней скорости движения твердого тела. В частности, могут быть найдены оптимальные значения амплитуды силы и ее направления для достижения максимального значения средней скорости движения твердого тела.

Ключевые слова: опорная плоскость, сухое трение, нелинейные колебания, режим движения, плоское твердое тело, горизонтальная плоскость

Благодарности. Авторы выражают благодарность редакции и рецензентам за внимательное отношение к статье и указанные замечания, которые позволили повысить ее качество.

Для цитирования. Муницын А.И., Цой В.Э. Динамика плоского твердого тела на горизонтальной плоскости. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2025;25(1):7–13. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-7-13

Механика

Original Empirical Research

Dynamics of a Flat Rigid Body on a Horizontal Plane

Aleksander I. Munitsyn, Valeryan E. Tsoy

National Research University MPEI, Moscow, Russian Federation

tsoyve@mpei.ru

Abstract

Introduction. The study of the motion of a rigid body carrying moving masses greatly simplifies the design of capsule robots that can move inside aggressive environments and perform the required operations. The following cases have been studied quite well: movement during interaction of a solid body with a reference plane and in aggressive environments; vibratory displacement of bulk media and solids on a vibrating base; optimization of rigid body motion; variation of average speed and acceleration at different intervals of motion; dependence of average speed on task parameters; control of the motion speed of the internal mass for the fastest possible rotation of a rigid body. However, at present, insufficient attention has been paid in the literature to the problems of studying the motion of a heavy flat body along a horizontal plane under the action of a harmonic force directed at an angle to the horizon, specifically, in terms of taking into account all possible driving modes and their features. This does not allow determining the optimal parameters of the problem. Therefore, the objective of this research was to identify the features of all possible modes of motion of a heavy solid body along a horizontal plane under the action of a harmonic force directed at an angle to the horizon.

Materials and Methods. The equations of motion of the mechanical system were used. Both analytical approaches and numerical methods were used to solve the steady-state equations of motion of the system. The dry friction model was adopted as a friction model, which made it possible to obtain accurate solutions for positive and negative values of the slip velocity up to constants. Values of these constants were determined from the docking conditions and the periodicity of the solution.

Results. An analytical solution to the problem for periodic solutions was obtained. Three possible motion modes were identified. Using numerical analysis, the dependences of the average speed of a body motion over the period on the angle of inclination of the force to the horizon were constructed. The optimal direction of force was established.

Discussion and Conclusion. The results of the conducted research allowed us to determine the optimal values of the problem parameters in order to reach the required value of the average velocity of a solid body. In particular, optimal values of the amplitude of the force and its direction can be found to reach the maximum value of the average velocity of motion of a solid.

Keywords: reference plane, dry friction, nonlinear vibrations, motion mode, flat rigid body, horizontal plane

Acknowledgements. The authors would like to thank the Editorial board and the reviewers for their attentive attitude to the article and for the specified comments that improved the quality of the article.

For Citation. Munitsyn AI, Tsoy VE. Dynamics of a Flat Rigid Body on a Horizontal Plane. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2025;25(1):7–13. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-7-13

Введение. В последнее время все большую актуальность имеют задачи проектирования движения роботов, несущих необходимые объекты, в том числе, перемещаемые в агрессивных средах [1] и способные выполнять требуемые операции [2]. Как правило, модель, учитывающая взаимодействие твердого тела с опорной плоскостью, это модель сухого трения [3]. В этой задаче много общего с задачей вибрационного перемещения сыпучих сред и твердых тел на вибрирующем основании [4]. Оптимизация движения капсульного робота при варьировании средней скорости рассматривалась в [5]. В [6] изменялось ускорение на различных интервалах движения. Капсульный робот, управление которым основано на этих двух принципах, рассмотрен в [7]. В работе [8] приведена оптимизация средней скорости. В [9] построена математическая модель электромагнитной силы втягивания сердечника. Зависимость средней скорости движения от параметров возбуждения рассмотрена в [10]. В [11] исследуется закон управления скоростью движения внутренней массы для наискорейшего поворота робота. Движение капсульного робота с двумя массами, движущимися по параллельным направляющим, рассмотрено в [12], а по двум взаимно перпендикулярным направляющим — в [13]. Роботы с линейно движущимися массами и ротором рассмотрены в [14]. Во всех перечисленных работах не исследовалось движение твердого тела по горизонтальной плоскости под действием гармонической силы, направленной под углом к горизонту, не устанавливались различные режимы движения и их особенности. Поэтому целью данного исследования являлось выявление особенностей всех возможных режимов движения твердого тела по горизонтальной плоскости под действием гармонической силы, направленной под углом к горизонту. Достижение поставленной цели позволяет определить оптимальные параметры задачи

исследования, например, такие как: оптимальный угол действия силы для достижения максимальной скорости, необходимые и оптимальные значения параметров задачи исследования для достижения требуемой скорости движения твердого тела.

Материалы и методы. Для решения поставленной задачи составляем уравнение движения механической системы. Решение уравнения для каждого режима движения может быть получено отдельно.

Уравнения движения. Тело имеет массу m и двигается по горизонтальной плоскости вдоль оси x. На тело действует гармоническая сила $F = A_0 \cos(\theta t)$, направленная под углом β к горизонтальной плоскости, где A_0 — амплитуда действующей внешней силы; θ — частота действующей внешней силы. Обозначим V_x— скорость тела в горизонтальном направлении; V_y— скорость тела в вертикальном направлении.

Движение твердого тела описывается системой двух уравнений:

$$m\frac{dV_x}{dt} = \eta Ns + A_0 \, cos\beta \, cos\left(\theta t\right),$$

$$m\frac{dV_y}{dt} = A_0 \, sin\beta \, cos\left(\theta t\right) + N - mg,$$

где g — ускорение свободного падения; N — сила реакции основания. В приведенных уравнениях сила трения учитывается по модели Кулона. Для этого введен коэффициент сухого трения η и безразмерный параметр s, который в состоянии покоя может принимать любое значение в диапазоне от –1 до 1. В случае проскальзывания, при V_x не равной нулю, сила трения постоянна и направлена противоположно скорости проскальзывания. Безразмерный параметр задается выражением $s = -sign(V_x)$.

Далее полагаем, что силы реакции основания распределены равномерно по опорной поверхности и движение тела происходит без отрыва от основания, то есть скорость тела в вертикальном направлении равна нулю. Из двух уравнений для описания движения твердого тела остается одно — для движения в горизонтальном направлении:

$$\frac{dV}{dt} = \eta s\left(1 - A\,sin\beta\,cos\,T\right) + A\,cos\beta\,cos\,T, \tag{1}$$

где $T = \theta t$ — безразмерное время; $V = V_x\theta/g$ — безразмерная скорость и безразмерная амплитуда возбуждения колебаний $A = A_0/(mg)$.

Похожая задача о движении твердого тела, несущего несбалансированный ротор по наклонной плоскости, была рассмотрена в [15].

Уравнение (1) имеет тривиальное решение при $V(t) = 0$. Это означает то, что тело находится в покое на рассматриваемом промежутке времени. Тогда параметр силы трения меняется по следующему закону:

$$s = \frac{A\,cos\beta\,cos\,T}{\eta\left(1 - A\,sin\beta\,cos\,T\right)}. \tag{2}$$

Тогда амплитудного значения проекции внешней силы на горизонтальную ось недостаточно для начала движения тела.

Движение с двумя мгновенными остановками. Решение уравнения (1) в случае проскальзывания между телом и основанием:

$$V_k\left(T\right) = \eta s_k\left[T - A\,sin\beta\,cos\,T\right] + A\,cos\beta\,sin\,T + C_k,\; k = 1, 2. \tag{3}$$

Здесь введены следующие обозначения: V_1 — для положительной скорости тела, которой соответствует $s_1 = -1$; V_2 — для отрицательной скорости; $s_2 = 1$. Здесь и далее будем рассматривать стационарные решения уравнения движения тела. Введем следующие обозначения для движения тела с положительной скоростью: φ_{11} обозначим время начала движения, а φ_{12} — время окончания движения тела. Через φ_{21} и φ_{22} — те же значения для движения с отрицательной скоростью. Для шести неизвестных получаем четыре уравнения:

$$V_k\left(\varphi_{k_1}\right) = -\eta s_k A\,sin\beta\,sin\left(\varphi_{k_1}\right) + A\,cos\beta\,sin\left(\varphi_{k_1}\right) + \eta s_k \varphi_{k_1} + C_k = 0; \tag{4}$$

$$V_k\left(\varphi_{k_2}\right) = -\eta s_k A\,sin\beta\,sin\left(\varphi_{k_2}\right) + A\,cos\beta\,sin\left(\varphi_{k_2}\right) + \eta s_k \varphi_{k_2} + C_k = 0. \tag{5}$$

$$k = 1, 2.$$

Из условия отсутствия длительной остановки тела получаем еще два условия:

$$\varphi_{12} = \varphi_{21}, \tag{6}$$

$$\varphi_{22} = \varphi_{11} + 2p. \tag{7}$$

Константы интегрирования C_1 и C_2 могут быть исключены из уравнений (4) и (5). Из полученных уравнений численно находятся фазы φ_{11}, φ_{12}, φ_{21} и φ_{22}. Полученные трансцендентные уравнения имеют по два решения. Для выбора правильного решения определяем вторую производную скорости:

$$\frac{d^2V_k}{dT^2}\left(\varphi_{k_1}\right)=A\left(-cos\beta cos\left(\varphi_{k_1}\right)+\eta s_k\, sin\beta sin\left(\varphi_{k_1}\right)\right), \quad (8)$$

которая должна быть положительна при $k = 1$ и отрицательна при $k = 2$.

Движение с двумя длительными остановками. В этом случае условия (6) и (7) несправедливы. При переходе от состояния покоя к движению ускорение тела должно быть равно нулю:

$$\frac{dV_k}{dT}\left(\varphi_{k_1}\right)=\eta s_k\left(1-A\,sin\beta cos\left(\varphi_{k_1}\right)\right)+A\,cos\beta cos\left(\varphi_{k_1}\right)=0;\; k=1,2. \quad (9)$$

Из уравнения (9) получаем точное решение для фаз движения:

$$\varphi_{k_1}=arccos\left(-\frac{\eta s_k}{A\,cos\beta-\eta s_k\, sin\beta}\right). \quad (10)$$

Нужный корень определяется аналогично предыдущему случаю. Константа C_k и фаза φ_{k2} находятся из (4) и (5). Если справедливо условие $A > \eta / (cos\,\beta + \eta\, sin\,\beta)$, тело может двигаться со скоростью больше нуля, а при условии, что амплитуда возбуждения колебаний — $A > \eta / (cos\,\beta + \eta\, sin\,\beta)$, движение тела происходит со скоростью меньше нуля.

Если время окончания движения тела с положительной скоростью φ_{12} меньше времени начала движения тела с отрицательной скоростью φ_{21}, а φ_{21} меньше, чем $\varphi_{11} + 2p$, то движение твердого тела может иметь две продолжительные остановки.

Рассмотрим движение тела с мгновенной и продолжительной остановками. Реакция горизонтального основания, как и действующая на тело сила, меняется по гармоническому закону, здесь возможны периодические решения.

В случае движения твердого тела с положительной скоростью и мгновенного перехода к отрицательной, а от отрицательной к положительной, после продолжительной остановки получаем систему уравнений (4), (5) для $k = 1, 2$, (9) для $k = 1$ и условия $\varphi_{12} = \varphi_{21}$. Фаза φ_{11} определяется выражением (10). Для остальных неизвестных также определяется точное решение. Полученное решение справедливо при выполнении условия $\varphi_{22} < \varphi_{11} + 2p$.

При мгновенном переходе от отрицательной скорости движения твердого тела к положительной, а от положительной к отрицательной, после длительной остановки, система уравнений (4–5) при $k = 1, 2$, остается без изменений. Уравнение (9) составляем для $k = 2$, а условие мгновенной остановки заменяем на $\varphi_{22} = \varphi_{11} + 2p$.

Таким образом, для всех возможных режимов стационарного движения твердого тела определяются четыре фазы и две константы интегрирования. На одном периоде движения, используя формулы (3), можно построить зависимость средней скорости движения твердого тела v_m от угла наклона линии действия внешней силы β. На интервале $\varphi_{11} < t < \varphi_{12}$ движение твердого тела происходит со скоростью больше нуля, а при $\varphi_{21} < t < \varphi_{22}$ движение твердого тела происходит со скоростью меньше нуля. На интервале $\varphi_{12} < t < \varphi_{21}$ и $\varphi_{22} < t < \varphi_{11} + 2p$ твердое тело не двигается. При совпадении φ_{12} и φ_{21} или φ_{22} и $\varphi_{11} + 2p$ скорость тела в этих точках меняется мгновенно.

Построенное решение для трех типов движения и состояния покоя (2) за один период колебаний позволяет определить среднюю скорость движения твердого тела:

$$V_m=\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_{11}}^{\varphi_{22}}V\left(T\right)dT.$$

Результаты исследования. Результаты исследования получены при коэффициенте сухого трения $\eta = 0{,}1$ и амплитуде возбуждения $A = 0{,}6$. Зависимости четырех фаз $\varphi_{kj}(\beta)$, $(j,k=1,2)$ от угла наклона внешней силы к горизонту представлены на рис. 1. Пунктирными кривыми обозначены точки мгновенного изменения скорости движения тела, сплошными кривыми — точки изменения скорости с продолжительной остановкой.

При малых углах наклона силы $\varphi_{12} = \varphi_{21}$, $\varphi_{22} = \varphi_{11} + 2p$ движение твердого тела происходит при двух моментальных остановках. Характер движения меняется при изменении угла β в большую сторону. В точке B_1 кривая разветвляется $\varphi_{22}(\beta) = \varphi_{11}(\beta) + 2p$. В результате имеем две кривые: $\varphi_{22}(\beta)$ и $\varphi_{11}(\beta)$, а в точке B_2 разветвляется кривая $\varphi_{12}(\beta) = \varphi_{21}(\beta)$ на $\varphi_{12}(\beta)$ и $\varphi_{21}(\beta)$. Между точками B_1 и B_2 твердое тело может иметь продолжительную и мгновенную остановки. Между точками B_2 и B_3 движение может иметь две продолжительные остановки. В точке B_3 кривые $\varphi_{22}(\beta)$ и $\varphi_{21}(\beta)$ сливаются. Между точками B_3 и B_4 при движения твердого тела в пределах одного периода при скорости большей нуля может быть одна длительная остановка. При больших значениях угла наклона тело находится в покое.

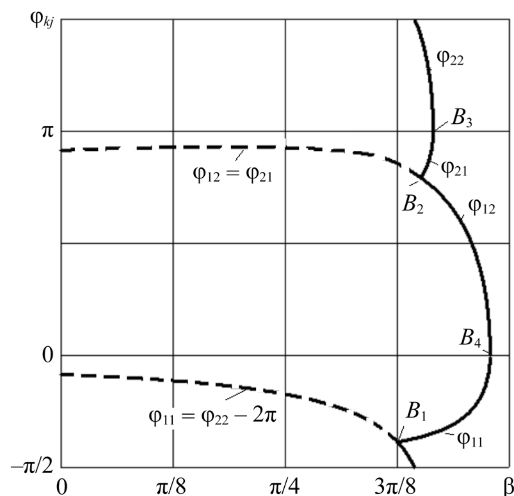


Рис. 1. Зависимости фаз стационарного движения от угла наклона приложенной силы

На рис. 2 представлены зависимости средней скорости твердого тела v_m от угла наклона линии действия внешней силы β при коэффициенте трения 0,1 и нескольких амплитудах возбуждения. При любых значениях амплитуды возбуждения и горизонтальном действии силы (β = 0) средняя скорость твердого тела равна нулю. С увеличением β средняя скорость возрастает. Точки смены режимов движения обозначены только на кривой A = 0,6. Для каждого значения амплитуды силы существует оптимальный угол, при котором средняя скорость движения максимальна.

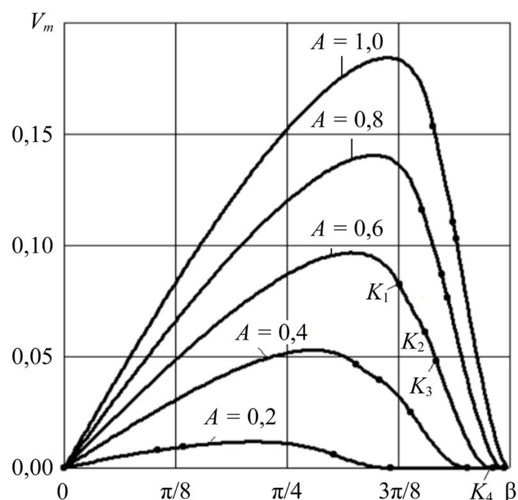


Рис. 2. Зависимость средней скорости V_m от угла β

Обсуждение и заключение. Исследовано движение твердого тела по горизонтальной плоскости под действием гармонической силы, направленной под углом к горизонту. Аналитические и численные результаты показали, что для всех возможных режимов стационарного движения твердого тела определяются четыре фазы. Полученные зависимости фаз стационарного движения и средней скорости движения твердого тела от угла наклона линии действия внешней силы позволяют определить необходимые и оптимальные значения параметров задачи для достижения требуемой скорости движения твердого тела. Показано, что для каждого значения амплитуды силы существует оптимальный угол, при котором средняя скорость движения максимальна.

Полученные результаты могут быть использованы в разработке алгоритмов и проектировании движения робототехнических устройств при движении по горизонтальной плоскости с учетом действия гармонических нагрузок.

Список литературы / References

1. Черноусько Ф.Л. Плоские движения тела, управляемого при помощи подвижной массы. *Доклады Российской Академии наук. Физика, технические науки*. 2020;494(1):69–74.

Chernousko FL. Plane Motions by Rigid Body Controlled by means of Movable Mass. *Doklady RAN: Physics*. 2020;494(1):69–74.

2. Черноусько Ф.Л. Оптимальное управление движением двухмассовой системы. *Доклады Академии Наук*. 2018;480(5):528–532. https://doi.org/10.7868/S0869565218050043

Chernousko FL. Optimal Motion Control of a Two–Mass System. *Doklady AN*. 2018;480(5):528–532. (In Russ.)

3. Андронов В.В., Журавлев В.Ф. *Сухое трение в задачах механики*. Монография. Москва–Ижевск: издательство «ИКИ»; 2010. 184 с.

Andronov VV, Zhuravlev VF. *Dry Friction in Problems of Mechanics*. Monograph. Moscow–Izhevsk: Publ. House “IKI”; 2010. 184 p. (In Russ.)

4. Блехман И.И. *Вибрационная механика и вибрационная реология (теория и приложения)*. Москва: Физматлит; 2018. 751 с.

Blekhman II. *Vibrational Mechanics and Vibrational Rheology (Theory and Applications)*. Moscow: Fizmatlit; 2018. 751 p. (In Russ.)

5. Черноусько Ф.Л. О движении тела, содержащего подвижную внутреннюю массу. *Доклады Академии Наук*. 2005;405(1):56–60.

Chernousko FL. On the Motion of a Body Containing a Movable Internal Mass. *Doklady AN*. 2005;405(1):56–60. (In Russ.)

6. Черноусько Ф.Л. Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы. *Прикладная математика и механика*. 2006;70(6):915–941.

Chernous’ko FL. Analysis and Optimization of the Motion of a Body Controlled by means of a Movable Internal Mass. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2006;70(6):819–842. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2007.01.003

7. Hongyi Li, Katsuhisa Furuta, Felix L Chernousko. Motion Generation of the Capsubot Using Internal Force and Static Friction. In: *Proc. 45th IEEE Conference on Decision and Control.* New York City: IEEE; 2006. P. 6575–6580. https://doi.org/10.1109/CDC.2006.377472

8. Нунупаров А.М., Суханов А.Н., Сырых Н.В. Оптимизация средней скорости капсульного робота методом нелинейного модельно-упреждающего управления. В: *Труды XXXIII Международной инновационной конференции молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения.* Москва: Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук; 2021. С. 436–441.

Nunuparov AM, Sukhanov AN, Syrykh NV. Optimization of the Average Speed of a Capsule Robot by Nonlinear Model-Proactive Control. In: *Proc. XXXIII International Innovative Conference of Young Scientists and Students on Problems of Machine Science*. Moscow: IMASH RAN; 2021. P. 436–441. (In Russ.)

9. Сырых Н.В., Нунупаров А.М., Суханов А.Н. К построению математической модели электромагнитной силы соленоида для капсульного робота. В: *Труды XXXIII Междунар. инновационной конф. молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения.* Москва: Институт машиноведения им. А. Благонравова Российской академии наук; 2021. С. 484–490.

Syrykh NV, Nunuparov AM, Sukhanov AN. On Building a Mathematical Model of the Electromagnetic Force of a Solenoid for a Capsule Robot. In: *Proc. XXXIII International Innovative Conference of Young Scientists and Students on Problems of Machine Science*. Moscow: IMASH RAN; 2021. P. 484–490. (In Russ.)

10. Болотник Н.Н., Нунупаров А.М., Чащухин В.Г. Капсульный вибрационный робот с электромагнитным приводом и возвратной пружиной: динамика и управление движением. *Известия Российской Академии Наук. Теория и системы управления.* 2016;(6):146–160.

Bolotnik NN, Nunuparov AM, Chashchukhin VG. Capsule-Type Vibration-Driven Robot with an Electromagnetic Actuator and an Opposing Spring: Dynamics and Control of Motion. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2016;(6):146–160.

11. Шматков А.М. Периодические решения задачи оптимального управления поворотом твердого тела с помощью внутренней массы. *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика.* 2020;(3):63–67. URL: https://www.mathnet.ru/links/3f7d22880247a4d39922b11f27ea3c8c/vmumm4333.pdf (дата обращения: 18.11.2024).

Shmatkov AM. Periodic Solutions to the Optimal Control Problem of Rotation of a Rigid Body Using Internal Mass. *Moscow University Bulletin. Mathematics. Mechanics*. 2020;(3):63–67. URL: https://www.mathnet.ru/links/3f7d22880247a4d39922b11f27ea3c8c/vmumm4333.pdf (accessed: 18.11.2024).

12. Сахаров А.В. Поворот тела с двумя подвижными внутренними массами на шероховатой плоскости. *Прикладная математика и механика*. 2015;79(2):132–141. URL: https://pmm.ipmnet.ru/ru/Issues.php?y=2015&n=2&p=196 (дата обращения: 18.11.2024).

Sakharov AV. Rotation of a Body with Two Movable Internal Masses on a Rough Plane. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2015;79(2):132–141. URL: https://pmm.ipmnet.ru/ru/Issues.php?y=2015&n=2&p=196 (accessed: 18.11.2024).

13. Xiong Zhang, Jian Xu, Hongbin Fang. A Vibration-Driven Planar Locomotion Robot – *Shell*. *Robotica.* 2018;36(9):1402–1420. http://doi.org/10.1017/S0263574718000383

14. Черноусько Ф.Л. Движение тела по плоскости под влиянием подвижных внутренних масс. *Доклады Академии Наук*. 2016;470(4):406–410. https://doi.org/10.7868/S0869565216280070

Chernousko FL. Movement of a Body along a Plane under the Influence of Moving Internal Masses. *Doklady AN.* 2016;470(4):406–410. (In Russ.)

15. Муницын А.И., Крайнова Л.Н. Вибрационное перемещение твердого тела по наклонной плоскости. *Проблемы машиностроения и автоматизации*. 2023;(1):31–35.

Munitsyn AI, Krainova LN. Vibratory Motion of a Rigid Body along an Inclined Plane. *Engineering and Automation Problems.* 2023;(1):31–35.

Об авторах:

Александр Иванович Муницын, доктор технических наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин Национального исследовательского университета «МЭИ» (111250, Российская Федерация, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14, стр. 1), SPIN-код, ORCID

Валерьян Эдуардович Цой, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин Национального исследовательского университета «МЭИ» (111250, Российская Федерация, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14, стр. 1), SPIN-код, ORCID, tsoyve@mpei.ru

Заявленный вклад авторов:

А.И. Муницын: описание теоретической части исследования движении тяжелого плоского тела по горизонтальной плоскости под действием гармонической силы, направленной под углом к горизонту; оформление научной статьи.

В.Э. Цой: проведение численного моделирования, оформление научной статьи.

Конфликт интересов: **авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Alexander I. Munitsyn, Dr.Sci. (Eng.), Professor of the Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines Department, National Research University MPEI (14, Krasnokazarmennaia Str., Moscow, 111250, Russian Federation), SPIN-code, ORCID

Valeryan E. Tsoy, Cand.Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines Department, National Research University MPEI (14, Krasnokazarmennaia Str., Moscow, 111250, Russian Federation), SPIN-code, ORCID, tsoyve@mpei.ru

Claimed Contributorship:

AI Munitsyn: description of the theoretical part of the study of the movement of a heavy flat body along a horizontal plane under the action of a harmonic force directed at an angle to the horizon; preparation of the scientific paper.

VE Tsoy: conducting numerical simulations, preparation of the scientific paper.

Conflict of Interest Statement: **the authors declare no conflict of interest.**

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 16.12.2024
Поступила после рецензирования / Reviewed 14.01.2025
Принята к публикации / Accepted 20.01.2025

МЕХАНИКА
MECHANICS




УДК 531.133.1
https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-14-22

Оригинальное теоретическое исследование

Анализ кинематики четвероногого робота при поворотных движениях его корпуса



EDN: YINENP

М.Ж. Фернандо, Г.Р. Сайпулаев ✉, М.Р. Сайпулаев
Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва, Российская Федерация
✉ saypulaevgr@mail.ru

Аннотация
Введение. Шагающие роботы находят широкое применение в промышленности благодаря своим уникальным возможностям передвижения по неровным и сложным поверхностям. Для обеспечения высокой точности управления их движением необходимо разработать математические модели и алгоритмы планирования перемещения робота по различным траекториям. Ключевым аспектом системы управления движением шагающих роботов является планирование перемещений их ног. Несмотря на значительные достижения в области моделирования кинематики четвероногих роботов, в существующих научных публикациях не представлено полноценной кинематической модели для роботов, аналогичных Mini Cheetah. Цель данной работы заключается в разработке кинематической модели четвероногого робота на основе Mini Cheetah, а также в формулировании рекомендаций по оптимизации его походки для обеспечения вращения вокруг различных осей. Создание такой модели позволит улучшить плавность и точность движений робота, что, в свою очередь, повысит его эффективность в реальных производственных условиях.
Материалы и методы. Процесс построения кинематической модели робота основан на использовании формул геометрии пространственного движения твердых тел. Для проверки эффективности предложенных алгоритмов перемещения ног робота при осуществлении поворотных движений его корпуса было применено численное моделирование кинематики робота. Численные расчеты выполнены с использованием математического пакета *Wolfram Mathematica.*
Результаты исследования. Предложены законы изменения конечных точек ног робота при его вращении вокруг вертикальной оси. Проведенное численное моделирование кинематики робота охватывало повороты корпуса по углам курса, крена и тангажа. По результатам моделирования установлено, что зависимости углов поворота звеньев ног являются периодическими функциями. Рассмотренные поворотные движения платформы робота могут происходить без возникновения сингулярных конфигураций.
Обсуждение и заключение. Результаты численного моделирования поворотных движений платформы робота подтвердили работоспособность предложенного плана переноса ног, который позволяет осуществлять плавное движение корпуса робота и избегать сингулярных конфигураций. Полученная кинематическая модель может быть использована для управления движением робота на кинематическом уровне при перемещениях по криволинейным траекториям. В качестве перспективы для дальнейших исследований стоит выделить разработку математической модели динамики четвероногого робота, а также создание законов управления его движением на динамическом уровне. Это позволит значительно расширить функциональные возможности робота и повысить эффективность его работы в различных условиях эксплуатации.

Ключевые слова: четвероногий робот, обратная кинематика, мобильный робот, кинематическая модель, планирование движения

Благодарности. Авторы выражают признательность коллегам с кафедры РМДиПМ «НИУ «МЭИ» за ценные замечания, высказанные в ходе работы над публикацией.

Для цитирования. Фернандо М.Ж., Сайпулаев Г.Р., Сайпулаев М.Р. Анализ кинематики четвероногого робота при поворотных движениях его корпуса. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2025;25(1):14–22. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-14-22

Original Theoretical Research

Analysis of a Four-Legged Robot Kinematics during Rotational Movements of Its Body

Marcelino J. Fernando, Gasan R. Saypulaev ✉, Musa R. Saypulaev
National Research University MPEI, Moscow, Russian Federation
✉ saypulaevgr@mail.ru

Abstract

Introduction. Walking robots are widely used in industry due to their unique capabilities for moving on uneven and complex surfaces. To provide high precision in controlling their movement, it is required to develop mathematical models and algorithms for planning the robot movement along various trajectories. A key aspect of the motion control system of walking robots is the planning of their leg movements. Despite significant advances in the field of modeling the kinematics of quadruped robots, existing scientific publications do not provide a complete kinematic model for robots similar to the Mini Cheetah. This research was aimed at the development of a kinematic model of a quadruped robot based on Mini Cheetah, as well as the formulation of recommendations for optimizing its gait to provide rotation around various axes. The creation of such a model will improve the smoothness and accuracy of the robot movements, which, in turn, will increase its efficiency under real production conditions.

Materials and Methods. The process of constructing a kinematic model of the robot was based on the use of formulas for the geometry of spatial motion of solids. To test the efficiency of the proposed algorithms for moving the robot legs when performing rotational movements of its body, numerical modeling of the robot kinematics was used. Numerical calculations were performed using the *Wolfram Mathematica* package.

Results. The laws of changing the endpoints of the robot legs during its rotation around the vertical axis were proposed. The conducted numerical modeling of the robot kinematics covered the rotation of the body at the course, roll and pitch angles. Based on the simulation results, it was established that the dependences of the rotation angles of the leg links were periodic functions. The considered rotational movements of the robot platform could take place without the occurrence of singular configurations.

Discussion and Conclusion. The results of numerical modeling of the robot platform rotation movements confirmed the operability of the proposed leg transfer plan, which allowed for smooth movement of the robot body and avoidance of singular configurations. The resulting kinematic model can be used to control the robot motion at the kinematic level when moving along curvilinear trajectories. As a prospect for further research, it is worth highlighting the development of a mathematical model of the dynamics of a four-legged robot, as well as the creation of laws for controlling its movement at a dynamic level. This will significantly expand the functionality of the robot and increase its efficiency under various operating conditions.

Keywords: four-legged robot, inverse kinematics, mobile robot, kinematic model, motion planning

Acknowledgements. The authors would like to thank their colleagues for valuable comments made during the work on the publication.

For Citation. Fernando MJ, Saypulaev GR, Saypulaev MR. Analysis of a Four-Legged Robot Kinematics during Rotational Movements of Its Body. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2025;25(1):14–22. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-14-22

Введение. В настоящее время при решении задач наблюдения и исследования территорий происходит широкое внедрение шагающих мобильных роботов [1]. Примером одной из распространенных конструкций таких роботов является четвероногий робот *Mini Cheetah* (рис. 1), разработанный в *MIT Biomimetic Robotics Lab* (https://biomimetics.mit.edu). Указанные четвероногие роботы могут передвигаться по различному типу местности в отличии от колесных или гусеничных роботов.

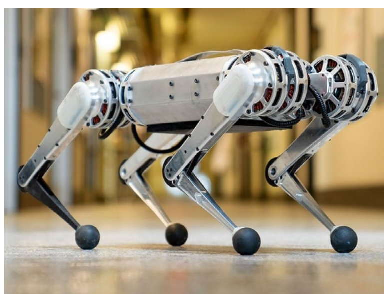


Рис. 1. Четвероногий робот *Mini Cheetah*[1]

[1] *Massachusetts Institute of Technology.* URL: https://news.mit.edu/2019/mit-mini-cheetah-first-four-legged-robot-to-backflip-0304 (дата обращения: 07.11.2024).

Конструкция рассматриваемых шагающих роботов включает в себя платформу, к которой крепятся четыре ноги. Каждая из ног представляет собой трехзвенный манипулятор. Одним из ключевых аспектов шагающего робота является топология конструкции его ног [2, 3]. Под топологией ног понимается состав и расположение звеньев, а также шарниров конечностей четвероногого робота, которые играют важную роль в обеспечении его движения и устойчивости. Разработка оптимальной топологии конструкции ног для четвероногих роботов представляет собой одну из сложнейших инженерных задач. Решение этой задачи не только способствует обеспечению устойчивой и эффективной походки (локомоции) робота на различных поверхностях, но и делает его механическую конструкцию более надежной и энергетически эффективной.

Другим аспектом, который необходимо учитывать, является приводная система, используемая в четвероногих роботах [4]. В таких роботах широко используются различные типы приводов, в том числе как пневматические [5], гидравлические [6, 7] и электрические [2, 6], каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки.

Четвероногие роботы обладают сложной кинематикой из-за большого числа степеней свободы. Рассматриваемый в данной работе робот имеет восемнадцать степеней свободы. Для обеспечения успешной локомоции четвероногих роботов необходимо решать прямую, так и обратную задачи кинематики, что позволяет организовывать динамическое управление положением ног этих роботов. Это управление должно обеспечивать балансировку робота, возможность преодоления различных поверхностей и адаптацию к различным видам локомоции, включая ходьбу, бег и скакание. Прямая задача кинематики шаговых роботов заключается в определении положения и ориентации платформы робота на основе известных углов поворота звеньев ног. Обратная задача состоит в нахождении углов поворота звеньев ног, которые обеспечивают заданное положение и ориентацию платформы робота.

В статье [8] подробно изложено применение метода Денавита-Хартенберга для моделирования прямой и обратной кинематики шагающего робота. Проведено исследование кинематической модели робота с целью создания алгоритма походки.

Авторы [9] разработали продвинутые методологии кинематического и динамического моделирования на основе теории винтов (screw theory) для четвероногих роботов. Предложенные методы учитывают различные походки и топологии механизмов ног, используя упрощенные модели контакта стопы (например, модель шарового шарнира). Описаны модели для трех отдельных фаз движения робота: стояние, ходьба и безопорная фаза (полёт). Разработанные стратегии управления используют представленные модели для планирования походки и бега трусцой.

Последние годы ученые работают над системами управления и планирования траектории. Метод управления движением является основой четвероногого робота, напрямую влияющим на гибкость, устойчивость и способность адаптироваться к различным опорным поверхностям [3].

В статье [10] уточняется конструкция регулятора для силового управления четвероногим роботом. Основной целью регулятора ставится выравнивание сил, действующих на робота при симметричной походке, а также снижение возмущению и поглощению ударных воздействий.

В исследовании [11] авторы предложили новую стратегию управления движением четвероногого робота, которая позволяет ему эффективно перемещаться по неровным ландшафтам, независимо от условий визуального восприятия. В [12] рассмотрено создание контроллера движения для четвероногого робота, использующего оптимизацию крутящего момента и контроль производительности с учетом воздействия непредсказуемых внешних сил, таких как неровности поверхности.

Экспериментальные исследования, посвященные применению иерархических контроллеров для управления движением четвероногих роботов, представлены в работе [13] на примере робота ANYmal, а также в [14] на примере робота StarlETH.

Авторы [15] обсуждают разработку четвероногого робота, предназначенного для решения задач в строительстве и ликвидации чрезвычайных ситуаций. В их работе рассматриваются статика, кинематика и система управления для конкретной конструкции данного робота.

Наконец, в исследовании [16] представлен новый контроллер модели центрального генератора шаблонов и тактика переключения походки, основанная на модели Уилсона-Коуэна. Эта разработка направлена на создание плавной походки робота и сокращение времени регулировки в колебательной механической системе.

Несмотря на разработанность задачи моделирования кинематики четвероногих роботов, в существующих публикациях отсутствует полная кинематическая модель движения роботов, конструкция ног которых аналогична роботу *Mini Cheetah* (рис. 1). Поэтому целью данной работы являлась разработка кинематической модели четвероногого робота на примере *Mini Cheetah* и выработка предложений по планированию движений звеньев робота, обеспечивающих вращение робота вокруг различных осей.

Для достижения поставленной цели необходимо сформулировать законы изменения координат конечных точек ног робота и угловых координат корпуса. Важно решить обратную задачу кинематики робота для проверки работоспособности предложенного плана движения. Полученные результаты в дальнейшем могут быть использованы для разработки управления роботом на кинематическом уровне.

Материалы и методы. Описание системы. Объектом исследования является роботизированная система, состоящая из твердого тела (платформы робота) и четырех ног с тремя степенями свободы $q_i = (\varphi_i, \alpha_i, \beta_i)$, $(i = \overline{1,4})$ на каждую из ног. Звенья ног связаны с платформой робота несколькими шарнирами, которые приводятся в движение электрическими приводами. Угол β_i является углом поворота звена O_iA_i вокруг продольной оси корпуса робота и характеризует поворот плоскости ноги (содержащей точки A_i, B_i, K_i) относительно вертикальной плоскости симметрии CXZ. А углы α_i, β_i характеризуют поворот звеньев A_iB_i и B_iK_i в плоскости ноги. Шарниры звеньев ног в точках O_i, A_i, B_i являются управляемыми, то есть поворот звеньев ног на углы φ_i, α_i, β_i обеспечивается независимо соответствующими приводами.

Вводится неподвижная система координат XYZ и подвижная система координат $Cxyz$, где точка C — геометрический центр платформы робота (рис. 2 *а*). Ориентация платформы робота описывается углами курса ψ (поворот вокруг оси z), крена θ (поворот вокруг оси x) и тангажа γ (поворот вокруг оси y), а положение платформы робота определяется координатами геометрического центра x_C, y_C и z_C в неподвижной системе координат.

Расстояния вдоль продольной и поперечной осей платформы робота от центра масс C и точками крепления ног к платформе робота O_i в подвижных осях $x_iy_iz_i$ задаются ρ_{xi} и ρ_{yi}. Длины звеньев обозначены, как $l_0 = \left|\overrightarrow{O_iA_i}\right|$, $l_1 = \left|\overrightarrow{A_iB_i}\right|$, $l_2 = \left|\overrightarrow{B_iK_i}\right|$ $(i = \overline{1,4})$ (рис. 2 *б*).

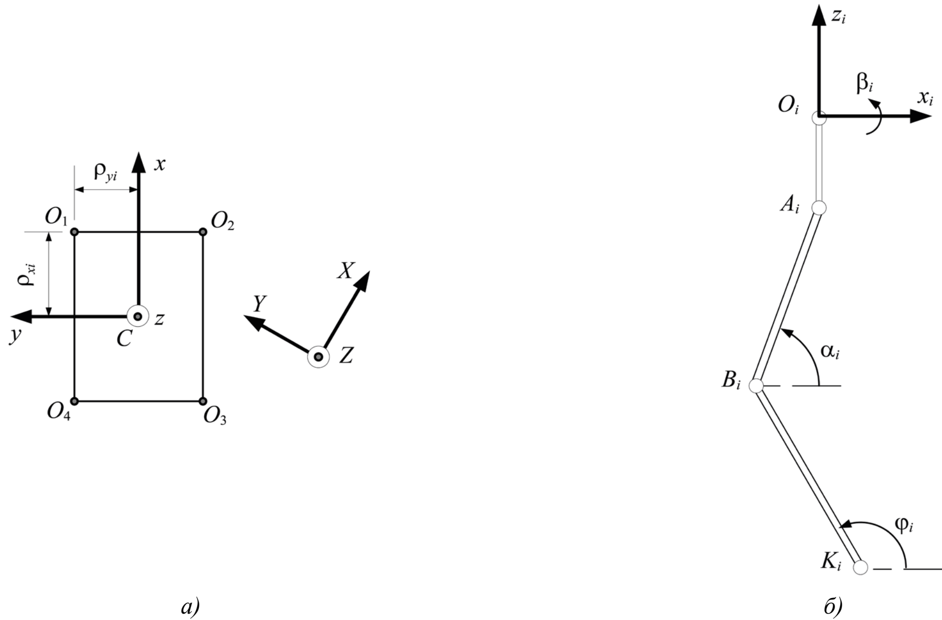


Рис. 2. Кинематическая схема робота:
а — вид сверху на корпус робота; *б* — вид сбоку на ногу робота

Кинематическое моделирование робота. В проекциях на оси неподвижной системы координат XYZ вектор положения конечной точки ноги K_i (или точки, контактирующей с поверхностью) определяется формулой:

$$\vec{r}_{Ki} = \vec{r}_C + \Gamma_{\psi\theta\gamma}\left(\vec{r}_{COi} + \vec{r}_{OiAi} + \Gamma_{\beta i}\left(\vec{r}_{AiBi} + \vec{r}_{BiKi}\right)\right), \quad (1)$$

где $\vec{r}_C = \begin{pmatrix} x_C & y_C & z_C \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ — вектор положения геометрического центра платформы робота C; $\Gamma_{\psi\gamma\theta} = \Gamma_\psi\Gamma_\theta\Gamma_\gamma$ — матрица поворота, которая вычисляется как произведения матриц элементарных поворотов на углы курса, крена и тангажа. Матрицы поворота, входящие в уравнение (1), имеют вид:

$$\Gamma_\psi = \begin{pmatrix} cos\,\psi & -sin\,\psi & 0 \\ sin\,\psi & cos\,\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\theta & -sin\,\theta \\ 0 & sin\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix},$$
$$\Gamma_\gamma = \begin{pmatrix} cos\,\gamma & 0 & sin\,\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\,\gamma & 0 & cos\,\gamma \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{\beta i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\beta_i & -sin\,\beta_i \\ 0 & sin\,\beta_i & cos\,\beta_i \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Другие радиус-вектора, входящие в уравнение (1), определяются выражениями:

$$\vec{r}_{COi} = \left(\rho_{xi} \quad \rho_{yi} \quad 0\right)^{\mathrm{T}}, \qquad \vec{r}_{OiAi} = \left(0 \quad -l_0 \sin\beta_i \quad -l_0 \cos\beta_i\right)^{\mathrm{T}},$$
$$\vec{r}_{AiBi} = \left(-l_1 \cos\alpha_i \quad 0 \quad -l_1 \sin\alpha_i\right)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{r}_{BiKi} = \left(-l_2 \cos\varphi_i \quad 0 \quad -l_2 \sin\varphi_i\right)^{\mathrm{T}}, \tag{3}$$

здесь верхний индекс «Т» означает операцию транспонирования вектора.

После выполнения промежуточных вычислений в правой части уравнения (1), с учетом выражений (2) и (3), получим проекции вектора положений r_{Ki} для каждой ноги.

Дифференцируя уравнение (1) по времени, получим кинематическую модель в виде:

$$v_{Ki} = v_C + J_0\left(q_{\psi\theta\gamma}, q_{\alpha\varphi\beta i}\right)\dot{q}_{\psi\theta\gamma} + J_i\left(q_{\psi\theta\gamma}, q_{\alpha\varphi\beta i}\right)\dot{q}_{\alpha\varphi\beta i}, \tag{4}$$

где $q_{\psi\theta\gamma} = \left(\psi \quad \theta \quad \gamma\right)^T$ — вектор угловых обобщенных координат платформы робота; $q_{\alpha\varphi\beta i} = \left(\beta_i \quad \alpha_i \quad \varphi_i\right)^T$ — вектор угловых обобщенных координат звеньев ног робота; $v_{Ki} = \left(\dot{x}_{Ki} \quad \dot{y}_{Ki} \quad \dot{z}_{Ki}\right)^T$ — вектор линейной скорости конечной точки i-ой ноги; $v_C = \left(\dot{x}_C \quad \dot{y}_C \quad \dot{z}_C\right)^T$ — вектор линейной скорости геометрического центра платформы робота; $J_0\left(q_{\psi\theta\gamma}, q_{\alpha\varphi\beta i}\right), J_i\left(q_{\psi\theta\gamma}, q_{\alpha\varphi\beta i}\right)$ — матрицы коэффициентов для соответствующих векторов обобщенных скоростей.

Результаты исследования. Для анализа поворотных движений робота посредством решения уравнений геометрии движения (1) (или интегрирования кинематических уравнений (4)) зададимся начальными условиями для углов поворота звеньев ног и законами изменения скоростей конечных точек ног v_{Ki}, геометрического центра платформы робота v_C и вектора угловых обобщенных координат $q_{\psi\theta\gamma}$. Рассматривая поворотные движения платформы робота, положим геометрический центр неподвижным в процессе движения $v_C = 0$.

В качестве начальной позиции звеньев ног примем следующие значения углов φ_i, α_i, β_i $(i = \overline{1,4})$ для каждой из ног:

$$\varphi_i(0) = 120^\circ,\ \alpha_i(0) = 60^\circ,\ \beta_i(0) = 0^\circ.\ \left(i = \overline{1,4}\right) \tag{5}$$

Приведенное сочетание значений углов φ_i, α_i, β_i $(i = \overline{1,4})$ соответствует положению стояния робота на полусогнутых ногах, которое представлено на упрощенной визуализации (рис. 3), выполненной в *Wolfram Mathematica*. При визуализации были использованы следующие значения геометрических параметров робота: $l_0 = 0{,}15$ м, $l_1 = 0{,}45$ м, $l_2 = 0{,}45$ м, $\rho_{x1} = \rho_{x2} = -\rho_{x3} = -\rho_{x4} = 0{,}5$ м, $\rho_{y1} = -\rho_{y2} = -\rho_{y3} = \rho_{y4} = 0{,}25$ м.

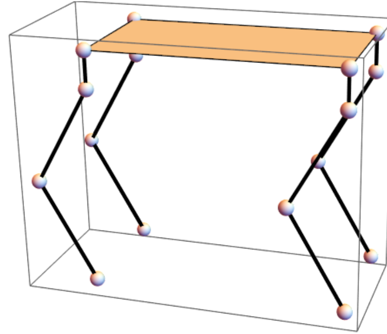


Рис. 3. Упрощенная визуализация начального положения робота

Для выполнения периодических поворотных движений платформы робота, ограниченных только углом крена, задаем законы изменения углов ориентации платформы в виде:

$$\theta(t) = \theta_0 + A\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right), \quad \gamma(t) = \gamma_0, \quad \psi(t) = \psi_0, \tag{6}$$

где $\psi_0 = 0^\circ$, $\theta_0 = 0^\circ$, $\gamma_0 = 0^\circ$ — начальные значения углов ориентации; $A = 0{,}2$ рад и $T = 20$ с — постоянные, характеризующие амплитуду и период колебаний по углу. Поскольку при повороте платформы робота по углу крена перенос ног является необязательным, то координаты точек контакта ног с опорной поверхностью остаются неизменными ($v_{Ki} = 0$):

$$x_{Ki}(t) = x_{Ki}(0), \quad y_{Ki}(t) = y_{Ki}(0), \quad z_{Ki}(t) = 0. \quad (i = 1,\ldots,4), \tag{7}$$

где $x_{Ki}(0)$ и $y_{Ki}(0)$ — начальные координаты точек контакта ног робота с опорной поверхностью.

Решая уравнения (1) с учетом (2) и (3) при подстановке программного движения (6) и (7), получим зависимости углов поворота φ_i, α_i, β_i звеньев ног (рис. 4).

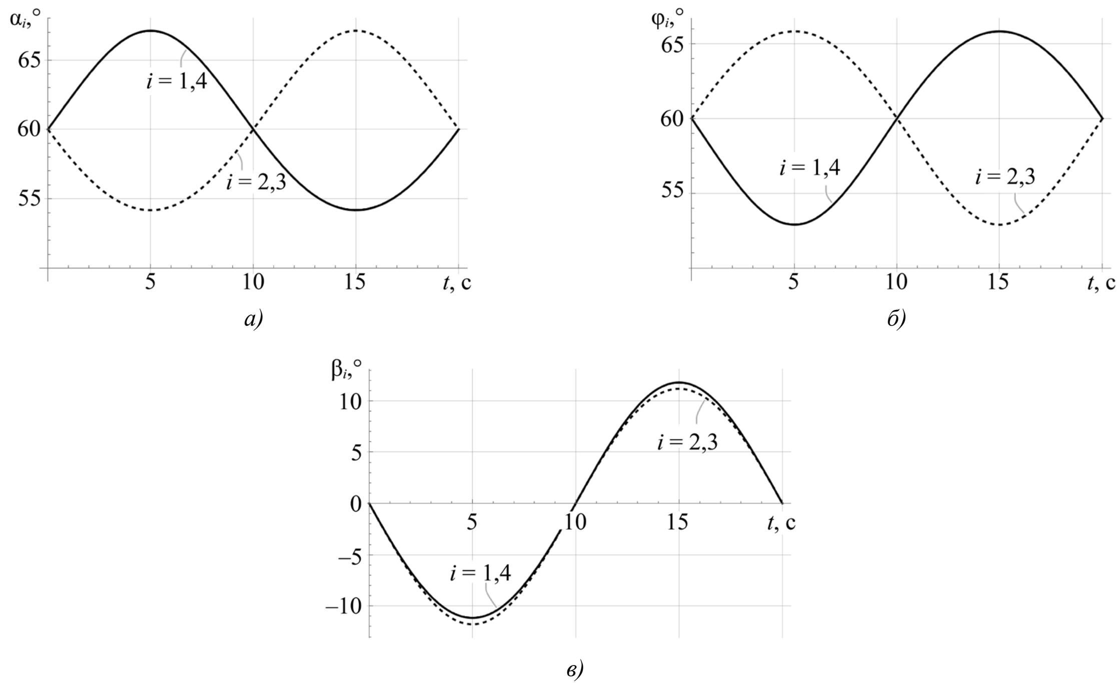


Рис. 4. Результаты моделирования поворотов по углу крена: *а* — углы $\alpha_i(t)$; *б* — углы $\varphi_i(t)$; *в* — углы $\beta_i(t)$

По результатам моделирования, представленном на рис. 4, можно отметить, что углы поворота звеньев ног являются гармоническими функциями. Как следствие, можно отметить, что повороты платформы робота вокруг продольной оси симметрии робота (6) могут осуществляться без отрыва точек контакта ног от поверхности.

Для выполнения периодических поворотных движений платформы робота только по углу тангажа задаем законы изменения углов ориентации платформы в виде:

$$\theta(t) = \theta_0, \quad \gamma(t) = \gamma_0 + A\,sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right), \quad \psi(t) = \psi_0. \tag{8}$$

При повороте платформы робота по углу тангажа перенос ног является необязательным, и координаты точек контакта ног с опорной поверхностью остаются неизменными.

Решая уравнения (1) с учетом (2) и (3) подставляя программные движения (7) и (8), получим зависимости углов поворота φ_i, α_i, β_i звеньев ног (рис. 5).

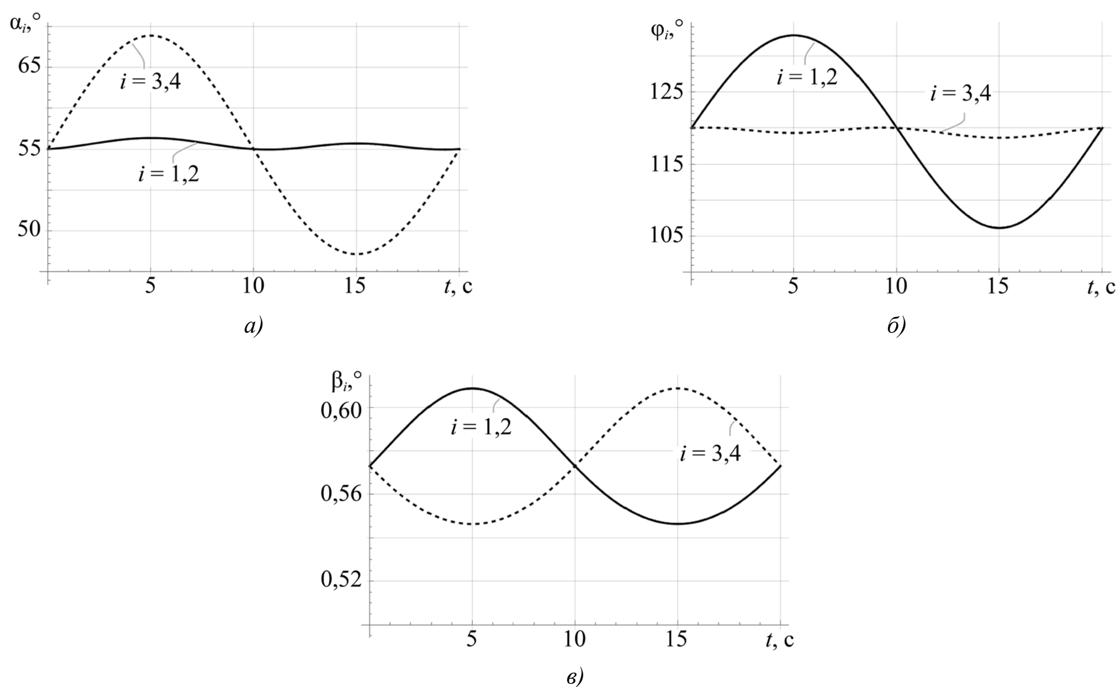


Рис. 5. Результаты моделирования поворотов по углу тангажа: *а* — углы $\alpha_i(t)$; *б* — углы $\varphi_i(t)$; *в* — углы $\beta_i(t)$

По результатам моделирования, представленным на рис. 5, можно отметить, что углы поворота звеньев ног являются гармоническими функциями. Как следствие, можно отметить, что повороты платформы робота вокруг поперечной оси симметрии робота (8) могут быть осуществлены без отрыва точек контакта ног от поверхности.

Для выполнения поворота вокруг оси Z рассмотрим законы изменения углов ориентации платформы робота в виде:

$$\theta(t)=\theta_0,\quad \gamma(t)=\gamma_0,\quad \psi(t)=\psi_0-\omega_z t, \tag{9}$$

где ω_z = 0,085 рад/с угловая скорость поворота платформы робота.

Для обеспечения вращения робота вокруг вертикальной оси необходимо спланировать перемещение ног. Рассмотрим случай, когда траектории точек контакта ног в проекциях на горизонтальную плоскость XY будут принадлежать окружности радиуса ρ. При этом будем считать, что ось, вокруг которой будет происходить вращение платформы робота, проходит через геометрический центр платформы. Тогда выражения для координат конечных точек ног можно определить из соотношений:

$$\begin{aligned}
&x_{K1}=\rho\, sin\left(\omega_z\Delta_{13}+\alpha_1\right),\quad y_{K1}=-\rho\, cos\left(\omega_z\Delta_{13}+\alpha_1\right),\\
&x_{K2}=\rho\, sin\left(\omega_z\Delta_{24}+\alpha_2\right),\quad y_{K2}=-\rho\, cos\left(\omega_z\Delta_{24}+\alpha_2\right),\\
&x_{K3}=\rho\, sin\left(\omega_z\Delta_{13}+\alpha_3\right),\quad y_{K3}=-\rho\, cos\left(\omega_z\Delta_{13}+\alpha_3\right),\\
&x_{K4}=\rho\, sin\left(\omega_z\Delta_{24}+\alpha_4\right),\quad y_{K4}=-\rho\, cos\left(\omega_z\Delta_{24}+\alpha_4\right),\\
&z_{K1}=z_{K3}=\frac{1}{2}\left[sgn\left(sin\left(\frac{2\pi t}{T_1}\right)\right)+1\right]\cdot h_K\, sin\left(\frac{2\pi t}{T_1}\right),\\
&z_{K2}=z_{K4}=\frac{1}{2}\left[sgn\left(sin\left(\frac{2\pi t}{T_1}-\pi\right)\right)+1\right]\cdot h_K\, sin\left(\frac{2\pi t}{T_1}-\pi\right),
\end{aligned} \tag{10}$$

где $\rho=\sqrt{\rho_{Xi}^2+\rho_{Yi}^2}$; $\alpha_i=arctan\left(\rho_{Yi}/\rho_{Xi}\right)$ — угол, характеризующий положение конечной точки i-ой ноги в начальный момент времени; h_K = 0,3 м — максимальная высота, на которую поднимаются конечные точки ног робота; T_1 = 6 с — время одного шага; Δ_{13}, Δ_{24} — вспомогательные функции, используемые для обеспечения кусочного задания изменения координат конечных точек ног:

$$\begin{aligned}
&\Delta_{13}=\left[sgn\left(sin\left(\frac{2\pi t}{T_1}\right)\right)+1\right]\cdot(t)\,mod\left(T_1\right)+\left(t+\frac{T_1}{2}-\left(t-\frac{T_1}{2}\right)mod\left(T_1\right)\right),\\
&\Delta_{24}=\left[sgn\left(sin\left(\frac{2\pi t}{T_1}-\pi\right)\right)+1\right]\cdot\left(t+\frac{T_1}{2}\right)mod\left(T_1\right)+\left(t-\left(t-T_1\right)mod\left(T_1\right)\right).
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь функция $(t)mod(T_1)$ возвращает остаток от целочисленного деления t на T_1. Кусочный характер задания изменения координат связан с рассмотрением гейтов (элементарных движений ног), при которых выполняется последовательный перенос накрестлежащих ног.

Решая уравнения (1) с учетом (2) и (3) при подстановке программного движения (9)–(11), получим зависимости углов поворота φ_i, α_i, β_i звеньев ног (рис. 6).

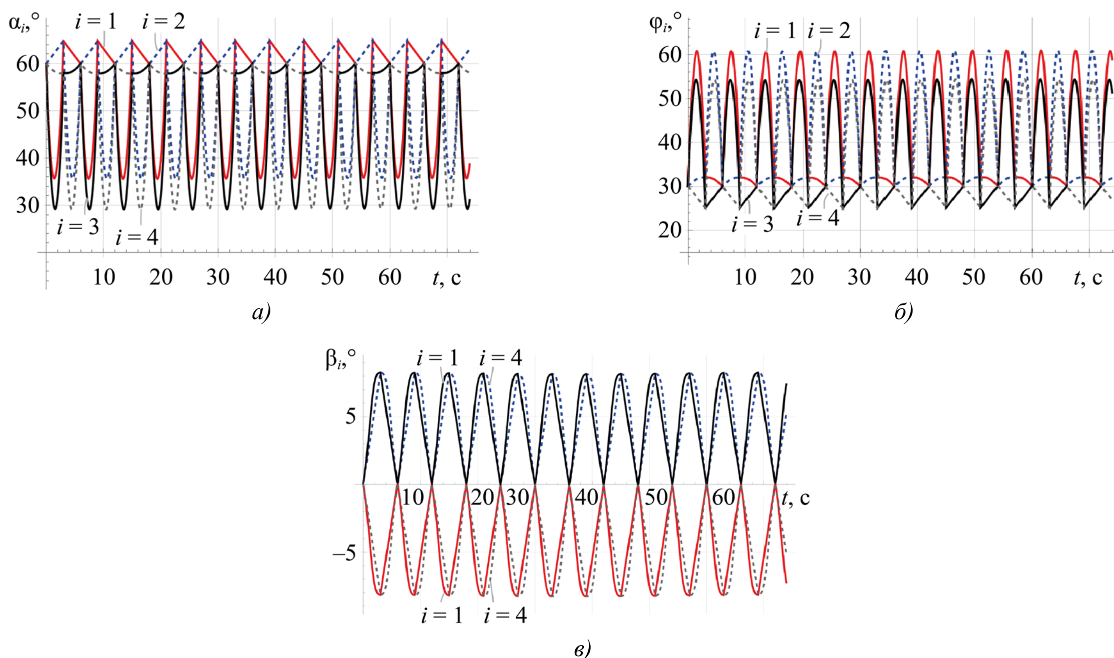


Рис. 6. Результаты моделирования поворотов по углу курса: *а* — углы $\alpha_i(t)$; *б* — углы $\varphi_i(t)$; *в* — углы $\beta_i(t)$

По результатам моделирования видно, что зависимости углов поворота звеньев ног являются периодическими функциями и, как следствие, рассмотренные поворотные движения платформы робота могут происходить без возникновения сингулярных конфигураций. Таким образом, предложенный план переноса ног (10), (11) при вращении вокруг вертикальной оси Z является пригодным для осуществления поворота робота на произвольный угол ψ.

Обсуждение и заключение. Построенная математическая модель кинематики позволяет определить углы в сочленениях звеньев ног робота, которые необходимо обеспечить для реализации желаемого движения платформы робота. Полученные результаты численного моделирования поворотных движений корпуса робота подтвердили работоспособность разработанной кинематической модели для оценки реализации заданных движений робота с учетом ограничений и размеров конструкции.

В случаях, когда платформа робота осуществляет плоское движение (при нулевых значениях углов тангажа и крена), построенная математическая модель кинематики совпадает с опубликованными результатами других авторов. Полученные в данной работе результаты являются обобщением и уточнением уравнений, связывающих углы поворота звеньев ног робота с положением и ориентацией платформы робота.

Применение разработанной кинематической модели (1), (4), а также предложенного плана переноса ног (10), (11) при вращении вокруг вертикальной оси, позволит построить управление на кинематическом уровне для передвижения робота по криволинейным траекториям. Данный подход существенно расширит функциональные возможности робота и повысит эффективность его работы в различных условиях эксплуатации.

Список литературы / References

1. Павловский В.Е. О разработках шагающих машин. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2013;(101):1–32. URL: https://keldysh.ru/papers/2013/prep2013_101.pdf (дата обращения: 20.11.2024).

Pavlovsky VE. For Elaboration of Walking Machines. *Keldysh Institute Preprints*. 2013;(101):1–32. URL: https://keldysh.ru/papers/2013/prep2013_101.pdf (accessed: 20.11.2024).

2. Taheri H, Mozayani N. A Study on Quadruped Mobile Robot. *Mechanism and Machine Theory*. 2023;190:105448. https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2023.105448

3. Hui Chai, Yibin Li, Rui Song, Guoteng Zhang, Qin Zhang, Song Liu, et al. A Survey of the Development of Quadruped Robots: Joint Configuration, Dynamic Locomotion Control Method and Mobile Manipulation Approach. *Biomimetic Intelligence and Robotics*. 2022;2(1):100029. https://doi.org/10.1016/j.birob.2021.100029

4. Liang ZJ, Jiang L, Zhao JX, Xing BY, Xu P, Su B. Design and Analysis of High Dynamic Actuator and Implementation on Quadruped Robot. *Journal of Physics: Conferences Series*. 2023;2478:102002. https://doi.org/10.1088/1742-6596/2478/10/102002

5. Jiupeng Chen, Hongjun San, Xing Wu. Gait Regulation of a Bionic Quadruped Robot with Antiparallelogram Leg Based on CPG Oscillator. *Complexity*. 2019;2019(5):5491298. https://doi.org/10.1155/2019/5491298

6. Khan H, Kitano S, Frigerio M, Camurri M, Barasuol V, Featherstone R, et al. Development of the Lightweight Hydraulic Quadruped Robot — MiniHyQ. In: *Proceedings of the 2015 IEEE International Conference on Technologies for Practical Robot Applications (TePRA)*. New York City: IEEE; 2015. P. 1–6. https://doi.org/10.1109/TePRA.2015.7219671

7. Lizhou Fang, Junhui Zhang, Huaizhi Zong, Ximeng Wang, Kun Zhang, Jun Shen, et al. Open-Source Lower Controller for Twelve Degrees of Freedom Hydraulic Quadruped Robot with Distributed Control Scheme. *HardwareX*. 2023;13:e00393. https://doi.org/10.1016/j.ohx.2022.e00393

8. Yunde Shi, Shilin Li, Mingqiu Guo, Yuan Yang, Dan Xia, Xiang Luo. Structural Design, Simulation and Experiment of Quadruped Robot. *Applied Sciences*. 2021;11(22):10705. https://doi.org/10.3390/app112210705

9. Wei Yan, Yang Pan, Junjie Che, Jiexian Yu, Zhuchen Han. Whole-Body Kinematic and Dynamic Modeling for Quadruped Robot under Different Gaits and Mechanism Topologies. *PeerJ Computer Science*. 2021;7(1):e821. https://doi.org/10.7717/peerj-cs.821

10. Havoutis I, Semini C, Buchli J, Caldwell DG. Quadrupedal Trotting with Active Compliance. In: *Proceedings of the 2013 IEEE International Conference on Mechatronics (ICM)*. New York City: IEEE; 2013. P. 610–616. https://doi.org/10.1109/ICMECH.2013.6519112

11. Jiawei Chen, Kun Xu, Xilun Ding. Adaptive Gait Planning for Quadruped Robot Based on Center of Inertia over Rough Terrain. *Biomimetic Intelligence and Robotics*. 2021;2(1):100031. https://doi.org/10.1016/j.birob.2021.100031

12. Guiyang Xin, Wolfslag W, Hsiu-Chin Lin, Tiseo C, Mistry M. An Optimization-Based Locomotion Controller for Quadruped Robots Leveraging Cartesian Impedance Control. *Frontiers in Robotics and AI*. 2020;7:48. https://doi.org/10.3389/frobt.2020.00048

13. Bellicoso CD, Gehring C, Hwangbo J, Fankhauser P, Hutter M. Perception-less Terrain Adaptation through Whole Body Control and Hierarchical Optimization. In: *Proceedings of the 2016 IEEE-RAS 16th International Conference on Humanoid Robots (Humanoids)*. New York City: IEEE; 2017. P. 558–564. https://doi.org/10.1109/HUMANOIDS.2016.7803330

14. Hutter M, Sommer H, Gehring C, Hoepflinger M, Bloesch M, Siegwart R. Quadrupedal Locomotion Using Hierarchical Operational Space Control. *The International Journal of Robotics Research*. 2014;33(8):1047–1062. https://doi.org/10.1177/0278364913519834

15. Zhao Z, Noritsugu T, Takaiwa M, Sasaki D. Development of Quadruped Robot with Pneumatic Actuator. In: *Proceedings of the 8th International Symposium on Fluid Power*. New York City: IEEE; 2010. P. 325–330. https://doi.org/ 10.1299/jsmeicam.2010.5.325

16. Junmin Li, Jinge Wang, Simon X Yang, Kedong Zhou, Huijuan Tang. Gait Planning and Stability Control of a Quadruped Robot. *Computational Intelligence and Neuroscience*. 2016:2016;9853070. https://doi.org/10.1155/2016/9853070

Об авторах:

Марселино Жулио Фернандо, студент кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин Национального исследовательского университета «МЭИ» (111250, Российская Федерация, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14), ORCID, ScopusID, themarcfernando98@outlook.com

Гасан Русланович Сайпулаев, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин Национального исследовательского университета «МЭИ» (111250, Российская Федерация, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14), SPIN-код, ORCID, ScopusID, saypulaevgr@mail.ru

Муса Русланович Сайпулаев, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин Национального исследовательского университета «МЭИ» (111250, Российская Федерация, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14), SPIN-код, ORCID, ScopusID, saypulaevmr@mail.ru

Заявленный вклад авторов:

М.Ж. Фернандо: разработка концепции, проведение исследования, написание черновика рукописи, формальный анализ.

Г.Р. Сайпулаев: научное руководство, валидация результатов, административное руководство исследовательским проектом, курирование данных.

М.Р. Сайпулаев: разработка методологии, разработка программного обеспечения, визуализация, написание рукописи и редактирование.

Конфликт интересов: **авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Marcelino J. Fernando, student of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, National Research University MPEI (14, Krasnokazarmennaya Str., Moscow, 111250, Russian Federation), ORCID, ScopusID, themarcfernando98@outlook.com

Gasan R. Saypulaev, Cand.Sci. (Eng.), Senior Lecturer of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, National Research University MPEI (14, Krasnokazarmennaya Str., Moscow, 111250, Russian Federation), SPIN-code, ORCID, ScopusID, saypulaevgr@mail.ru

Musa R. Saypulaev, Cand.Sci. (Eng.), Senior Lecturer of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, National Research University MPEI (14, Krasnokazarmennaya Str., Moscow, 111250, Russian Federation), SPIN-code, ORCID, ScopusID, saypulaevmr@mail.ru

Claimed Contributorship:

MJ Fernando: concept development, conducting research, manuscript drafting, formal analysis.

GR Saypulaev: academic advising, validation of the results, administrative management of the research project, data curation.

MR Saypulaev: methodology development, software development, visualization, manuscript writing and editing.

Conflict of Interest Statement: **the authors declare no conflict of interest.**

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 20.12.2024
Поступила после рецензирования / Reviewed 15.01.2025
Принята к публикации / Accepted 24.01.2025

МЕХАНИКА
MECHANICS





УДК 536.21
https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-23-31

Оригинальное теоретическое исследование



EDN: YYGRFP

Численное решение задачи теплопроводности в пористой пластине с топологией трижды периодических минимальных поверхностей

К.В. Губарева ✉, **А.В. Еремин**
Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация
✉ r.kristina2017@mail.ru

Аннотация

Введение. Термические характеристики материалов, созданных на базе трижды периодических минимальных поверхностей (ТПМП), становятся все более важными в свете роста интереса к материалам с особыми теплофизическими свойствами и их применениям в инженерии, энергетике и других областях. Поскольку эти материалы обладают уникальными структурными и функциональными характеристиками, понимание взаимосвязи между их геометрией и теплофизическими параметрами играет ключевую роль в оптимизации их использования. Несмотря на значительное внимание, уделенное проблеме, исследование взаимосвязи между геометрией пористых структур и их термическими характеристиками остается неполным. Существующие научные работы охватывают лишь отдельные варианты, а полное понимание влияния сложной микро- и макроструктуры на теплопроводность требует дальнейшего изучения. Существующий пробел в научном знании заключается в недостаточной систематизации и обобщении существующих данных, что затрудняет разработку универсальных подходов к расчету теплопроводности в таких материалах. Целью данного исследования являлась разработка упрощенных формул для расчета показателя эффективной теплопроводности пористых структур, основанных на ТПМП-ячейках типа S, предложенных Фишером и Кохом. Авторы также ставили задачу анализа теплопроводного процесса в пластине с заданными параметрами пористости. Это позволит улучшить понимание термодинамических процессов, происходящих в таких системах.

Материалы и методы. Для достижения поставленных целей проведено математическое моделирование, включающее решение граничной задачи с учетом выявленных корреляций. Рассматривается ячеистая конструкция, изготовленная из PETG-пластика и имеющая поры, состоящие из одинаковых повторяющихся элементов. Эти элементы формируют трехмерную минимальную поверхность, которая соответствует модели Фишера-Коха. Анализ проводился с использованием двух методов: расчеты в MathCAD, основанные на методе конечных разностей, и моделирование в ANSYS методом конечных элементов. При этом учитывалось влияние геометрических параметров пористой структуры на ее теплофизические характеристики.

Результаты исследования. Результаты исследования представляют собой численное решение задачи теплопроводности для пористой пластины, принимая во внимание симметричные граничные условия первого рода и наличие внутренних источников тепла, которые остаются постоянными во времени и учитывают топологические особенности материала. В ходе работы были получены распределения температуры как по пространственной координате, так и во времени. Оценено изменение теплового потока в зависимости от вариаций коэффициента пористости пластины. Построены и проанализированы графики распределения изотерм и скорости их перемещения, что позволяет более глубоко понять динамику теплопередачи в рассматриваемой системе.

Обсуждение и заключение. Полученные математические зависимости демонстрируют степень и характер влияния пористости на распределение плотности теплового потока. Было установлено, что изменения в пористости пластины могут как увеличить, так и уменьшить интенсивность теплопереноса, что позволяет достигать необходимых значений термического сопротивления материала. Полученные результаты согласуются с выводами, изложенными в других исследованиях аналогичной тематики, что открывает возможности для их применения в дальнейших исследованиях. Эти результаты могут быть полезны при проектировании систем тепловой защиты

для тепловыделяющего оборудования, а также для тепломассообменных трактов тепломеханического оборудования и других приложений. Решения представлены в доступной и понятной форме, что облегчает их использование как для широкого круга исследователей, так и инженеров, и не требует привлечения дорогостоящего программного обеспечения или специализированной вычислительной техники.

Ключевые слова: трижды периодические минимальные поверхности, топология Фишера-Коха S, пористость, внутренние источники теплоты, численное решение, теплопроводность, метод конечных элементов, метод конечных разностей, скорость распространения теплоты

Благодарности. Авторы выражают благодарность редакции журнала и рецензентам за внимательное отношение к статье.

Финансирование. Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект № 23–79–10044, https://rscf.ru/project/23-79-10044/).

Для цитирования. Губарева К.В., Еремин А.В. Численное решение задачи теплопроводности в пористой пластине с топологией трижды периодических минимальных поверхностей. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2025;25(1):23–31. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-23-31

Original Theoretical Research

Numerical Solution to the Problem of Thermal Conductivity in a Porous Plate with a Topology of Triply Periodic Minimal Surfaces

Kristina V. Gubareva ✉, Anton V. Eremin

Samara State Technical University, Samara, Russian Federation

✉ r.kristina2017@mail.ru

Abstract

Introduction. Thermal performance of materials based on triply periodic minimal surfaces (TPMS) is becoming increasingly important in view of the growing interest in materials with special thermophysical properties and their applications in engineering, energy, and other fields. Since these materials have unique structural and functional characteristics, understanding the relationship between their geometry and thermal parameters plays a key role in optimizing their use. Despite the considerable attention paid to the problem, the study of the relationship between the geometry of porous structures and their thermal characteristics remains incomplete. Existing scientific papers cover only individual options, and a complete understanding of the effect of complex micro- and macrostructure on thermal conductivity requires further study. The current gap in scientific knowledge is the lack of systematization and generalization of existing data, which complicates the development of universal approaches to calculating thermal conductivity in such materials. The objective of this study was to develop simplified formulas for calculating the effective thermal conductivity of porous structures based on S-type TPMC cells proposed by Fisher and Koch. The authors also set the task of analyzing the heat-conducting process in a plate with given porosity parameters. This will improve the understanding of the thermodynamic processes occurring in such systems.

Materials and Methods. To achieve the stated objectives, mathematical modeling was performed, including the solution to the boundary value problem taking into account the identified correlations. A cellular structure made of PETG plastic and having pores consisting of identical repeating elements was considered. These elements formed a three-dimensional minimal surface that corresponded to the Fisher-Koch model. The analysis was performed using two methods: calculations in MathCAD based on the finite difference method, and modeling in ANSYS using the finite element method. In this case, the effect of the geometric parameters of the porous structure on its thermal characteristics was taken into account.

Results. The research results represented a numerical solution to the thermal conductivity problem for a porous plate, taking into account the symmetrical boundary conditions of the first kind, and the presence of internal heat sources that remained constant in time and considered the topological features of the material. In the course of the study, temperature distributions were obtained, both in the spatial coordinate and in time. The change in heat flow depending on variations in the plate porosity coefficient was estimated. The graphs of isotherm distribution and their speed of movement were constructed and analyzed, which allowed for a deeper understanding of the heat transfer dynamics in the system under consideration.

Discussion and Conclusion. The obtained mathematical dependences demonstrate the degree and nature of the effect of porosity on the distribution of heat flux density. It has been found that changes in the porosity of the plate can both increase and decrease the intensity of heat transfer, which provides reaching the required values of thermal resistance of

the material. The obtained results are consistent with the findings presented in other studies on similar topics, which opens up opportunities for their application in further research. These results can be useful in designing thermal protection systems for heat-generating equipment, as well as for heat and mass transfer paths of heat-mechanical equipment and other applications. The solutions are presented in an accessible and understandable form, which makes them easy to use for a wide range of researchers and engineers, and does not require expensive software or specialized computing equipment.

Keywords: triply periodic minimal surfaces, Fischer-Koch S, porosity, internal heat sources, numerical solution, thermal conductivity, finite element method, finite difference method, speed of heat propagation

Acknowledgements. The authors would like to thank the Editorial board of the journal and the reviewers for their attentive attitude to the article.

Funding Information. The research is done with the financial support of the Russian Science Foundation (project No. 23–79–10044, https://rscf.ru/project/23-79-10044/).

For Citation. Gubareva KV, Eremin AV. Numerical Solution to the Problem of Thermal Conductivity in a Porous Plate with a Topology of Triply Periodic Minimal Surfaces. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2025;25(1):23–31. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-23-31

Введение. Пористые материалы находят широкое применение в различных отраслях промышленности, таких как металлургия [1], микроэлектронная промышленность [2] и строительная индустрия [3]. Их уникальные свойства, обусловленные наличием полостей и пустот, заполненных плохо проводящими тепло газами, делают их идеальными для использования в производстве тепловой изоляции [4]. Актуальность данной проблемы связана с необходимостью повышения энергоэффективности в различных сферах, что является важным аспектом в условиях устойчивого развития. В свете этого в статье [4] авторами была разработана энерго- и ресурсосберегающая технология получения эффективного пористого тепло- и звукоизоляционного конструкционного материала, что подчеркивает важность исследований в данной области.

Сравнительный анализ литературы показывает, что проблема, поднятая авторами, достаточно исследована, однако остается ряд аспектов, требующих более глубокого изучения. В работе [5] представлены современные пористые теплоизоляционные материалы, включая применение силикатного сырья в их производстве. Авторы в [6] исследовали различные типы матриц пористых материалов и подчеркнули, что геометрический размер образца (в частности, его толщина, оптимальная для звукопоглощения — около 20 мм) значительно влияет на их характеристики. Кроме того, необходимо отметить, что пористые материалы имеют меньшую массу по сравнению с однородными средами, что делает их особенно привлекательными для использования в условиях массогабаритных ограничений, таких как авиационная [7] и космическая отрасли [8]. В контексте нефтехимической промышленности, исследования, проведенные Мазитовым А.А. [9], продемонстрировали возможности нового веб-приложения для математического моделирования нестационарного течения нефти в пористой среде, что подчеркивает значимость пористых материалов и в этой области. В работе [10] наглядно показана актуальность анализа механических свойств пористых пластиков, так как была разработана прикладная методология расчета колебаний пьезокерамических пористых пластин с использованием метода конечных элементов.

Несмотря на свои преимущества, такие как малая масса, высокие прочностные характеристики и предсказуемые теплофизические свойства, пористые материалы имеют недостатки, которые связаны со стохастическим распределением пор и анизотропией их свойств, что усложняет математический и физический анализ процессов переноса. В этой связи анализ материала с пористой структурой, созданного на основе трижды периодических минимальных поверхностей (ТПМП), представляет значительный интерес, так как он демонстрирует предсказуемые свойства в зависимости от геометрических характеристик элементарных ячеек.

Изучение тепловых свойств материалов на основе ТПМП активно ведется в научных кругах [11]. Для моделирования процессов, происходящих в пористых средах, применяются как численные [12], так и аналитические методы. Однако одной из основных проблем остается поиск качественной связи между теплофизическими характеристиками [13] и геометрией пористых сред [14]. В этом контексте исследование температурного поля в пористых телах с учетом их геометрических характеристик и пористости ячеек, а также применение современных численных методов и алгоритмов, представляют собой область с высоким потенциалом и значительной актуальностью. Разработка численных алгоритмов, способных описывать поведение температуры по координате и во времени, а также теплового потока в зависимости от изменений коэффициента пористости, позволят более точно и эффективно подходить к проектированию теплообменников и разработке тепловой защиты оборудования.

Таким образом, целями настоящего исследования стали изучение процесса теплопроводности в пористой пластине с заданной пористостью из пластика PETG и поиск зависимостей для определения коэффициента эффективной теплопроводности таких материалов на основе ячеек типа Фишера-Коха S. Для достижения поставленной цели была сформулирована и решена задача теплопроводности в пористой пластине, а также проведен анализ полученных решений. Результаты данного исследования могут быть полезны для практиков в проектировании теплообменников и в других сферах применения.

Материалы и методы. Объектом исследования является изготовленная из материала PETG пористая пластина толщиной стенки 0,0001 м. Её теплоемкость составляет 1 050 Дж/(кг·К), плотность — 1 300 кг/м^3, а теплопроводность — 0,2 Вт/(м·К). На рис. 1 представлен эскиз данной пластины, созданный с помощью программного комплекса Ansys. Пластина сформирована из элементарных ячеек Фишера-Коха в топологии S. Начальные условия задаются следующим образом: температура в начальный момент времени T_0 = 20 °C, температура на поверхности пластины — $T_{СТ}$ = 100 °C, а мощность источника теплоты — 500 Вт/м^3.

Математическая постановка задачи. Математическая формулировка рассматриваемой задачи имеет вид (1) – (4) [15]:

$$A\cdot\left(1-\varphi\right)\cdot\frac{\partial\Theta\left(\xi,Fo\right)}{\partial Fo}=\frac{\partial^2\Theta\left(\xi,Fo\right)}{\partial\xi^2}+Po\cdot A; \quad (1)$$

$$Fo>0;\quad 0<\xi<1;$$

$$\Theta\left(\xi,0\right)=0; \quad (2)$$

$$\Theta\left(1,Fo\right)=1; \quad (3)$$

$$\frac{\partial\Theta\left(\xi,Fo\right)}{\partial\xi}=0, \quad (4)$$

$$\xi=\frac{x}{l};\quad \Theta=\frac{T-T_0}{T_{СТ}-T_0};\quad Fo=\frac{a_s\tau}{l^2};\quad Po=\frac{g_V L^2}{\lambda_{eff}A\cdot\left(T_{СТ}-T\right)_0};\quad A=\frac{\lambda_s}{\lambda_{eff}},$$

где Θ — относительная избыточная температура; ξ — безразмерная координата; Fo — критерий Фурье (безразмерное время); Po — критерий Померанцева; T — температура, °C; x — координата, м; τ — время, с; $T_{СТ}$ — температура стенки, °C; T_0 — начальная температура, °C; l — размер ячейки, м; A — коэффициент; q_V — мощность внутреннего источника теплоты, Вт/м^3; $a_s = \lambda_s / c\rho_s$ — коэффициент температуропроводности.

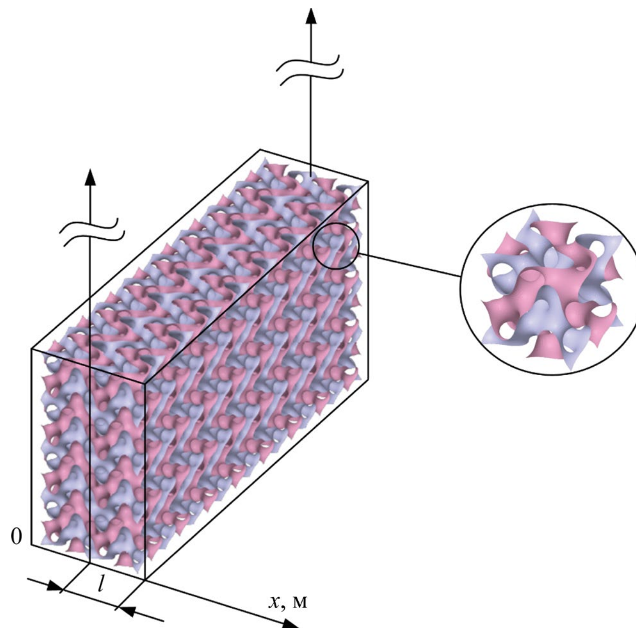


Рис. 1. Иллюстрация пластины

Методы исследования. При исследовании теплопроводности в пористых материалах была применена комбинация двух подходов — репрезентативного элементарного объема (RVE) и вычислительной гомогенизации. Данная методология реализована на ТПМП-ячейках Фишера-Коха типа S для расчета эффективной теплопроводности [15]. Эффективный коэффициент теплопроводности материала определялся по формуле [16]:

$$\lambda_{eff}=\lambda_s\cdot 0,73\cdot\left(1-\varphi\right),$$

где λ_s — коэффициент теплопроводности материала каркаса; φ — пористость [17].

Плотность пористого материала определялась по формуле [18]:

$$\rho_{eff} = \rho_s \cdot (1-\varphi),$$

где ρ_s — значение плотности материала, из которого изготовлена ячейка.

Геометрические характеристики ячеистой структуры являются определяющими факторами, от которых зависит степень пористости материала, и были вычислены с помощью математического выражения:

$$\varphi = 1 - V_{\text{ТПМП}} / V,$$

где $V_{\text{ТПМП}}$ — объем ячейки; V — объем куба.

Численное решение. Решение задачи (1) – (4) было получено методом конечных разностей [19]. Согласно данному методу, вводится пространственно-временная сетка с шагами по координате $\Delta\xi$ и по времени ΔFo. При этом:

$$\xi_i = i\Delta\xi; \quad i = \overline{0, I}; \quad Fo_k = k\Delta Fo; \quad k = \overline{0, K}, \qquad (5)$$

где I, K — число шагов по координате ξ и времени Fo соответственно.

На сетке (5) вводятся сеточные функции $\Theta_i^k = \Theta(\xi_i, \text{Fo}_k)$ [20]. Применяя явную схему аппроксимации дифференциальных операторов, задача (1) – (4) принимает следующий вид [21]:

$$A \cdot (1-\varphi) \cdot \frac{\Theta_i^{k+1} - \Theta_i^k}{\Delta Fo} = \frac{\Theta_{i-1}^k - 2\Theta_i^k + \Theta_{i+1}^k}{\Delta\xi^2} + Po \cdot A;$$

$$\Theta_i^0 = 0;$$

$$\Theta_i^k = 1;$$

$$\frac{\Theta_0^{k+1} - \Theta_0^k}{\Delta\xi} = 0.$$

При расчете было использовано 2,5 млн. ячеек сетки.

При проведении расчетов были установлены два ключевых ограничения. Прежде всего, материал PETG характеризуется неизменными и заранее определенными теплофизическими параметрами. Также было принято, что теплообмен происходит исключительно на поверхностях с заданными граничными условиями, в то время как остальные грани ячейки теплоизолированы.

В ходе проведения исследования было установлено, что использование сетки, содержащей от 2,5 до 3,0 миллиона ячеек, приводит к оптимальному результату решения задачи. Повышение числа элементов сетки не оказывает значительного влияния на точность решения, однако существенно увеличивает затраты времени и сложность процесса.

Чтобы подтвердить корректность результатов, полученных в среде MathCAD, авторы провели дополнительное моделирование в системе ANSYS. Динамика температурных изменений графически представлена на рис. 2.

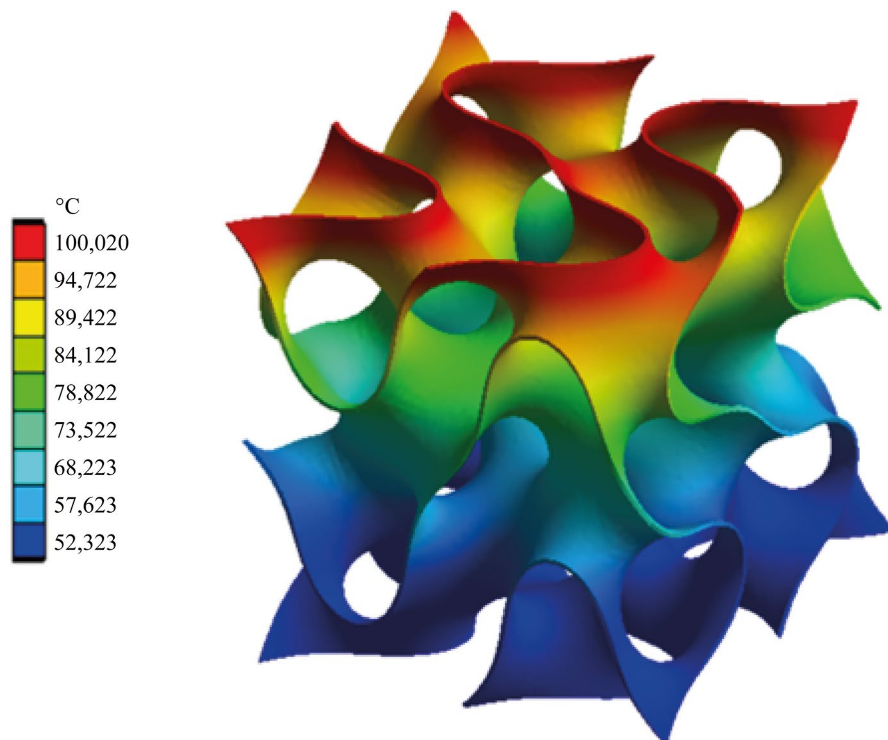


Рис. 2. Изменение температуры в ячейке

Результаты исследования. На рис. 3 представлены результаты расчетов, полученные методом конечных элементов и методом конечных разностей. Анализ результатов позволяет заключить об удовлетворительном совпадении безразмерных температур, полученных двумя методами. Путем анализа вычислительных экспериментов установлено, что ТПМП-ячейка типа Фишера-Коха S сохраняет структуру (не происходит внутренних пересечений, полного заполнения пор и др.) в диапазоне толщины стенки $0 < \delta < 0{,}002$ м. Временная эволюция изотерм и динамика их скоростного режима отображены на рис. 4, 5. Примечательной особенностью является то, что в процессе временного развития каждая изотермическая линия формируется на поверхности с характерной начальной скоростью, присущей именно ей. Примечательно, что повышение пористости материала приводит к усилению теплового потока на всем временном интервале исследования, что наглядно продемонстрировано на рис. 5. Зависимость плотности теплового потока от времени при варьировании пористости представлена на рис. 6.

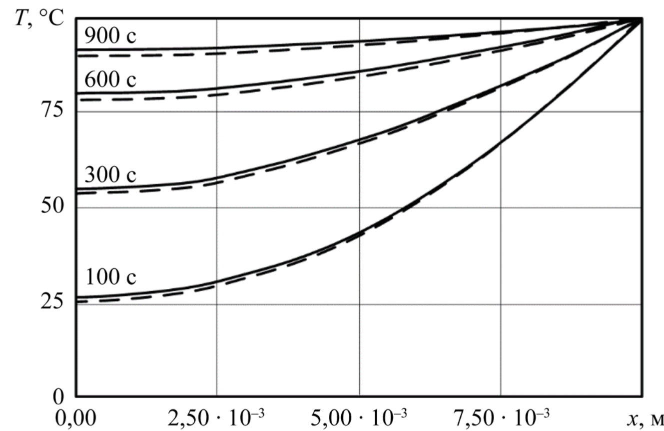


Рис. 3. Распределение температуры по координате: ——— – решение по МКР; – – – – – решение по МКЭ

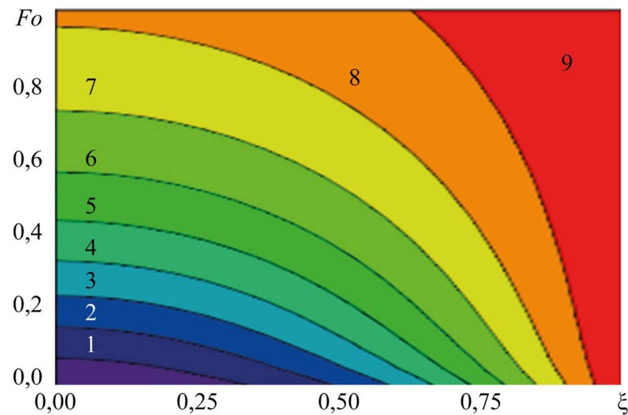


Рис. 4. Графики движения изотерм при координате в зависимости от времени при:
$\Theta = 0{,}1$ (1); 0,2 (2); 0,3 (3); 0,4 (4); 0,5 (5); 0,6 (6); 0,7 (7); 0,8 (8); 0,9 (9)

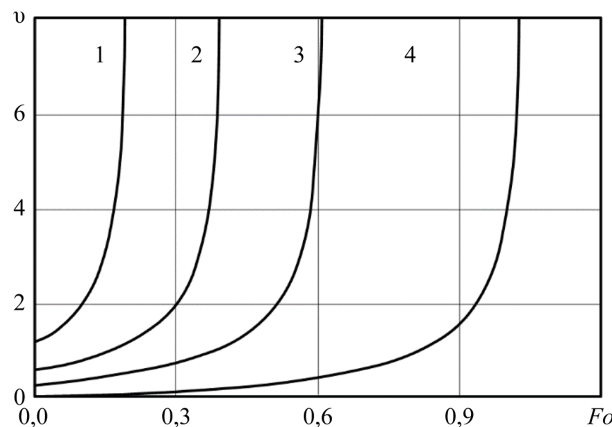


Рис. 5. Распределение скоростей изотерм в пористой пластине при $\Theta = 0{,}2$ (1); 0,5 (2); 0,7 (3); 0,9 (4)

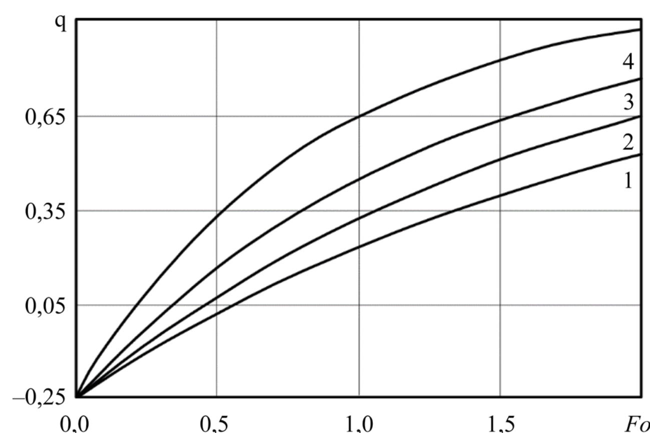


Рис. 6. Распределение плотности теплового потока при φ = 0,75 (1); 0,80 (2); 0,85 (3); 0,90 (4);

Обсуждение и заключение. В ходе исследования была разработана математическая модель теплопередачи для плоской пористой пластины, основанной на предфрактале Фишера-Коха S типа ТПМП. Точность решения была подтверждена путем сопоставления с альтернативными методами расчета, такими как конечно-разностный и конечно-элементный анализ. Максимальное отклонение результатов по норме Чебышева не превышало 3 %.

Одним из значительных преимуществ предложенного подхода является возможность расчета распределения температур и тепловых потерь в пористых средах без использования сложных компьютерных программ и дорогостоящего вычислительного оборудования. Полученные выражения для температурной функции существенно упрощают процесс инженерных расчетов теплопереноса в подобных материалах.

Результаты численного моделирования, согласующиеся с фундаментальными исследованиями теплопроводности [20], методами задания граничных и начальных условий [15], а также с различными подходами к численным расчетам [11], открывают новые перспективы для дальнейших научных изысканий. В частности, разработанный подход может быть применён для анализа одномерного теплопереноса в пористых средах, включая расчёт распределения температур, тепловых потоков и эффективных коэффициентов теплопроводности материалов на основе ТПМП.

Список литературы / References

1. Кем А.Ю. Исследование магнитных свойств и фрактальности поверхности порошкового Fe — P материала — аналога технического железа, полученного горячей объемной штамповкой пористой заготовки. *Вестник Донского государственного технического университета*. 2011;11(2):174–180. URL: https://www.vestnik-donstu.ru/jour/article/view/707 (дата обращения: 25.10.2024).

Kem AYu. Surface Magnetic Properties and Fractality of Fe-P Powder Material – Iron Analogue Received by Porous Workpiece Forging. *Vestnik of Don State Technical University*. 2011;11(2):174–180. URL: https://www.vestnik-donstu.ru/jour/article/view/707 (accessed: 25.10.2024).

2. Yi-Lung Cheng, Chih-Yen Lee. Porous Low-Dielectric-Constant Material for Semiconductor Microelectronics. In book: *Nanofluid Flow in Porous Media.* MSh Kandelousi, S Ameen, M Shaheer Akhtar, Hyung-Shik Shin (eds). London: InTech; 2020. 244 p. https://doi.org/10.5772/intechopen.81577

3. Su-Gwang Jeong, Jeonghun Lee, Seong Jin Chang, Sumin Kim. Thermal and Structural Behavior of Thermal Inertia-Reinforced Mortars for Building Envelope Applications. *Construction and Building Materials*. 2023;384:131452. https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2023.131452

4. Maslov AA, Mironov SG, Poplavskaya TV, Kirilovskiy SV, Tsyryulnikov IS. Effect of Porous Inserts on Aerodynamics of Flying Vehicles. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1382:012023. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1382/1/012023

5. Гольцман Б.М., Яценко Е.А., Геращенко В.С., Комунжиева Н.Ю., Яценко Л.А., Смолий В.А. и др. Пористые теплоизоляционные материалы на основе различных видов силикатного сырья. *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические наук*. 2020;(1):55–60. https://doi.org/10.17213/1560-3644-2020-1-55-60

Goltzman BM, Yatsenko EA, Gerashchenko VS, Komunzhieva NYu, Yatsenko LA, Smoliy VA, et al. Porous Heat-Insulating Materials Based on Various Types of Silicate Raw Materials. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Technical Sciences*. 2020;(1):55–60. https://doi.org/10.17213/1560-3644-2020-1-55-60

6. Шашкеев К.А., Шульдешов Е.М., Попков О.В. Краев И.Д., Юрков Г.Ю. Пористые звукопоглощающие материалы (обзор). *Труды ВИАМ*. 2016;42(6):46–56. https://doi.org/10.18577/2307-6046-2016-0-6-6-6

Shashkeev KA, Shuldeshov EM, Popkov OV, Kraev ID, Yurkov GYu. Porous Sound-Absorbing Materials (review). *Proceedings of VIAM*. 2016;42(6):46–56. https://doi.org/10.18577/2307-6046-2016-0-6-6-6

7. Гасанов С.К. Полимерные композиционные материалы для авиационной и космической техники. *Международный научно-исследовательский журнал*. 2014;28(9):29–30. URL: https://research-journal.org/archive/9-28-2014-september (дата обращения: 25.10.2024).

Gasanov SK. Polymeric Composite Materials for Aircraft and Space Equipment. *International Research Journal*. 2014;28(9):29–30. https://research-journal.org/en/archive/9-28-2014-september (accessed: 25.10.2024).

8. Péter Ádám, Levente Dudás, Ottó Temesi, András Nagy, Katalin Sinkó. Porous Aluminum Oxide Insulation Materials Tested in Space Mission. *CEAS Space Journal*. 2023;15:671–680. https://doi.org/10.1007/s12567-022-00473-w

9. Мазитов А.А. Web-приложение для математического моделирования нестационарного течения нефти в пористой среде. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2023;23(4):422–432. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-4-422-432

Mazitov AA. Web Application for Mathematical Modeling of Unsteady Oil Flow in Porous Medium. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2023;23(4):422–432. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-4-422-432

10. Соловьев А.Н., Чебаненко В.А., Оганесян П.А., Фоменко Е.И. Об одном методе расчета изгибных и сдвиговых колебаний пористого пьезоэлемента в низкочастотной области. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2024;24(2):148–158. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-148-158

Soloviev AN, Chebanenko VA, Oganesyan PA, Fomenko EI. On a Method for Calculating Bending and Shear Vibrations of a Porous Piezoelement in the Low-Frequency Region. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2024;24(2):148–158. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-148-158

11. Prosviryakov EYu, Ledyankina OA, Goruleva LS. Exact Solutions to the Navier–Stokes Equations for Describing the Flow of Multicomponent Fluids with Internal Heat Generation. *Russian Aeronautics*. 2024;67(1):60–69. https://doi.org/10.3103/S1068799824010070

12. Ershkov S, Leshchenko D, Prosviryakov E. Correction: A Novel Type of ER3BP Introducing Milankovitch Cycles or Seasonal Irradiation Processes Influencing onto Orbit of Planet. *Archive of Applied Mechanics*. 2023;93:823–824. https://doi.org/10.1007/s00419-022-02328-6

13. Pavlenko A, Koshlak H. Production of Porous Material with Projected Thermophysical Characteristics. *Metallurgical and Mining Industry*. 2015;(7):123–127.

14. Chaniot J, Moreaud M, Sorbier L, Fournel T, Becker J-M. Tortuosimetric Operator for Complex Porous Media Characterization. *Image Analysis and Stereology*. 2019;38(1):25–41. https://doi.org/10.5566/ias.2039 15

15. Bragin DM, Popov AI, Eremin AV, Olatuyi OJ, Zinina SA, Shulga AS. Thermal Conductivity of a Porous Material with an Ordered Structure. In: *Proc. 4th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency*. New York City: IEEE; 2022. P. 858–861. https://doi.org/10.1109/SUMMA57301.2022.9973913

16. Mingwei Tian, Sukang Zhu, Ning Pan. Measuring the Thermophysical Properties of Porous Fibrous Materials with a New Unsteady-State Method. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*. 2011;107:395–405. https://doi.org/10.1007/s10973-011-1581-y

17. Bicer Ayse, Kar Filiz. A Model for Determining the Effective Thermal Conductivity of Porous Heterogeneous Materials. *International Journal of Thermophysics*. 2019;40:9. https://doi.org/10.1007/s10765-018-2468-y

18. Dong Niu, Hongtao Gao. Thermal Conductivity of Ordered Porous Structures Coupling Gas and Solid Phases: A Molecular Dynamics Study. *Materials*. 2021;14(9):2221. https://doi.org/10.3390/ma14092221

19. Chau KV, Gaffney JJ. A Finite-Difference Model for Heat and Mass Transfer in Products with Internal Heat Generation and Transpiration. *Journal of Food Science*. 2006;55(2):484–487. https://doi.org/10.1111/j.1365-2621.1990.tb06792.x

20. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. *Численные методы.* Москва: Физматлит; 2004. 400 с.

Formalev VF, Reviznikov DL. *Numerical Methods*. Moscow: Fizmatlit; 2004. 400 p. (In Russ.)

21. Вержбицкий В.М. *Основы численных методов.* Москва: Высшая школа; 2002. 840 с.

Verzhbitsky VM. *Fundamentals of Numerical Methods*. Moscow: Vysshaya shkola; 2002. 840 p. (In Russ.)

Об авторах:

Кристина Владимировна Губарева, кандидат технических наук, доцент кафедры промышленной теплоэнергетики Самарского государственного технического университета (443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244), SPIN-код, ORCID, ScopusID, r.kristina2017@mail.ru

Антон Владимирович Еремин, доктор технических наук, доцент, проректор по интеграционным проектам, заведующий кафедрой промышленной теплоэнергетики Самарского государственного технического университета (443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244), SPIN-код, ORCID, ScopusID, a.v.eremin@list.ru

Заявленный вклад авторов:
К.В. Губарева: проведение исследования, разработка методологии, написание рукописи, редактирование, визуализация.
А.В. Еремин: научное руководство, разработка концепции, получение финансирования.

Конфликт интересов: **авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:
Kristina V. Gubareva, Cand.Sci. (Eng.), Associate Professor of the Department of Industrial Thermal Power Engineering, Samara Polytekh (244, Molodogvardeyskaya Str., Samara, 443100, Russian Federation), SPIN-code, ORCID, ScopusID, r.kristina2017@mail.ru

Anton V. Eremin, Dr.Sci. (Eng.), Associate Professor, Vice-rector for Integration Projects, Head of the Department of Industrial Thermal Power Engineering, Samara Polytekh (244, Molodogvardeyskaya Str., Samara, 443100, Russian Federation), SPIN-code, ORCID, ScopusID, a.v.eremin@list.ru

Claimed Contributorship:
KV Gubareva: investigation, methodology, writing – review & editing, visualization.
AV Eremin: supervision, conceptualization, funding acquisition.

Conflict of Interest Statement: **the authors claimed no conflict of interest.**

All authors have read and approved the final version of manuscript.

Поступила в редакцию / Received 17.01.2025
Поступила после рецензирования / Reviewed 14.02.2025
Принята к публикации / Accepted 28.02.2025

МАШИНОСТРОЕНИЕ И МАШИНОВЕДЕНИЕ
MACHINE BUILDING AND MACHINE SCIENCE





УДК 621.9 + 539.62
https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-32-42

Оригинальное эмпирическое исследование

Влияние периодических флуктуаций параметров режимов резания на температуру передней поверхности токарного резца



Е.В. Фоминов ✉, **В.Е. Гвинджилия**, **А.А. Марченко**, **К.Г. Шучев**
Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация
✉ fominoff83@mail.ru

EDN: LQYCND

Аннотация

Введение. Современные исследования, направленные на повышение эффективности процессов обработки деталей, подчеркивают важность учета влияния периодических возмущений на динамику резания. Однако немногие работы рассматривают неуправляемые периодические возмущения, источниками которых являются шпиндельные узлы и несущая система станка. Эти возмущения также оказывают значительное влияние на конечные показатели качества процесса резания. Поэтому актуальной задачей в области технологии машиностроения становится раскрытие закономерностей влияния неуправляемых возмущений на динамику процесса резания, что особенно важно для разработки систем автоматизированного выбора технологических режимов или систем вибродиагностики. Цель этой работы заключается в определении механизма влияния периодических флуктуаций параметров обработки, вызванных вибрационными возмущениями, на температуру передней поверхности токарного резца, что является основным показателем развития диффузионного износа твердосплавного инструмента.

Материалы и методы. Исследование влияния периодических возмущений на температуру передней поверхности инструмента проводилось в два этапа. В первом этапе на базе натурного эксперимента по чистовому продольному точению заготовок из стали 10ГН2МФА резцами с пластинами твёрдого сплава Т15К6 были идентифицированы параметры модели возмущений в системе, а именно колебательные ускорения инструмента в процессе его износа. Вибрационные характеристики используемого универсального токарного станка 16К20 измерялись с помощью вибростенда, собранного на основе вибропреобразователей АР2089–100–3.3–02Б, с частотой дискретизации сигнала 10 кГц. На втором этапе проводилось цифровое исследование моделируемых возмущений и их влияния на динамику процесса резания. Результаты опытов анализировались с целью сравнения расчетной максимальной температуры передней поверхности инструмента в моменты, когда один из заданных выходных параметров обработки, полученный в результате цифрового моделирования, достигает экстремального значения под воздействием периодических возмущений.

Результаты исследования. Установлено, что флуктуации параметров технологических режимов резания, вызванные периодическими возмущениями, приводят к колебаниям температуры в зоне контакта инструмента с заготовкой. Наибольшее влияние на температуру в исследуемой системе резания оказало сочетание параметров обработки в моменты достижения экстремальных значений подачи. При этом, когда флуктуации глубины и скорости резания достигали экстремальных величин, значительных изменений температуры контакта не наблюдалось.

Обсуждение и заключение. Результаты проведённого исследования подчеркивают важность анализа влияния периодических возмущений на импульсные изменения контактной температуры в зоне обработки. Приведённая модель взаимосвязи между вибрациями инструмента и температурой в зоне резания может быть использована для оптимизации режимов точения. Критерием оптимальности выступает минимизация износа инструмента, что определяется на основе анализа температурных колебаний и сигналов вибрационной активности инструмента.

Ключевые слова: флуктуации режимов резания, продольное точение, вибрации привода подач, температура передней поверхности, пластические деформации

Благодарности. Авторы выражают благодарность редакции и рецензентам за внимательное отношение к статье и указанные замечания, которые позволили повысить ее качество.

Финансирование. Работа выполнена в рамках хозяйственного договора № 160312622214 с АО «АЭМ-технологии».

Для цитирования. Фоминов Е.В., Гвинджилия В.Е., Марченко А.А., Шучев К.Г. Влияние периодических флуктуаций параметров режимов резания на температуру передней поверхности токарного резца. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2025;25(1):32–42. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-32-42

Original Empirical Research

Effect of Periodic Fluctuations of Cutting Mode Parameters on the Temperature of the Front Face of a Turning Tool

Evgeny V. Fominov ✉, **Valery E. Gvindjiliya**, **Andrey A. Marchenko**, **Constantine G. Shuchev**
Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation
✉ fominoff83@mail.ru

Abstract

Introduction. Modern research aimed at improving the efficiency of the workpart procedures emphasizes the importance of taking into account the effect of periodic disturbances on the cutting dynamics. However, few works consider uncontrolled periodic disturbances, whose sources are spindle units and the supporting system of the machine. These disturbances also have a significant impact on the final quality indicators of the cutting process. Therefore, an urgent task in the mechanical engineering technology is to establish patterns of the effect of uncontrolled disturbances on the dynamics of the cutting process, which is particularly important for the development of systems for the automated selection of operating conditions or vibration diagnostics systems. This research is aimed at determining the mechanism of influence of periodic fluctuations of processing parameters caused by vibration disturbances on the temperature of the front face of the turning cutter, which is the key indicator of the development of diffusion wear of the carbide tool.

Materials and Methods. The study of the effect of periodic disturbances on the temperature of the front face of the tool was performed in two stages. At the first stage, based on a full-scale experiment on finishing longitudinal turning of blanks made of 10GN2MFA steel with cutters with T15K6 hard alloy plates, the parameters of the disturbance model in the system were identified, namely, the oscillatory accelerations of the tool under its wear. The vibration characteristics of the 16K20 universal lathe were measured using a vibration stand assembled on the basis of AP2089–100–3.3–02B vibration transducers, with a signal sampling frequency of 10 kHz. At the second stage, a digital study of the simulated disturbances and their effect on the dynamics of the cutting process was carried out. The results of the experiments were analyzed to compare the calculated maximum temperature of the front face of the tool at the moments when one of the specified output parameters of processing, obtained as a result of digital modeling, reaches an extreme value under the impact of periodic disturbances.

Results. It has been established that fluctuations in the parameters of operating cutting modes caused by periodic disturbances lead to temperature fluctuations in the contact zone of the tool and the blank. The greatest impact on the temperature in the cutting system under study was exerted by the combination of processing parameters at the moments of reaching extreme feed values. However, when fluctuations in cutting depth and speed reached extreme values, no significant changes in contact temperature were observed.

Discussion and Conclusion. The results of the conducted research emphasize the importance of analyzing the effect of periodic disturbances on pulse changes in contact temperature in the processing zone. The presented model of the relationship between tool vibrations and temperature in the cutting zone can be used to optimize turning modes. The criterion of optimality is the minimization of tool wear, which is determined on the basis of an analysis of temperature fluctuations and vibration activity signals of the tool.

Keywords: fluctuations of cutting modes, longitudinal turning, feed drive vibrations, front face temperature, plastic deformations

Acknowledgments. The authors would like to thank the Editorial board and the reviewers for their attentive attitude to the article and for the specified comments that improved the quality of the article.

Funding Information. The research is done under terms of economic agreement No. 160312622214 with JSC AEM-Technologies.

For Citation. Fominov EV, Gvindjiliya VE, Marchenko AA, Shuchev CG. Effect of Periodic Fluctuations of Cutting Mode Parameters on the Temperature of the Front Face of a Turning Tool. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2025;25(1):32–42. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-32-42

Введение. Обработка металлов резанием — это сложный нелинейный процесс, который характеризуется необратимыми преобразованиями механической энергии в тепловую. Пластические деформации и процессы трения между обрабатываемым материалом и передней и задней поверхностями инструмента образуют основную совокупность факторов, непосредственно влияющих на интенсивность тепловыделения в контактной зоне. В свою очередь, это определяет уровень изнашивания и цикловую стойкость режущего инструмента (РИ). При традиционном рассмотрении влияния температуры на износостойкость РИ принято говорить о среднем значении данного параметра в зоне резания. Однако следует подчеркнуть, что характер температурного распределения на контактных площадках [1] и в объёме инструментального материала [2] также существенно влияет на период стойкости инструмента.

Температура резания является важным показателем термодиссипативных свойств износостойких покрытий [3], эффективности применения смазочно-охлаждающих технологических средств (СОТС) [4], а также выбора условий подачи СОТС в зону резания [5]. Контроль температурного режима особенно важен при резании без применения СОТС [6] или с их минимальным использованием [7]. Оценка теплового состояния зоны резания имеет первостепенное значение при обработке заготовок из материалов с пониженной теплопроводностью [8], а также при выборе оптимальных режимов резания, которые обеспечивают заданное качество поверхности детали [9] и минимальный износ режущего инструмента [10].

В данной работе зона контакта стружки с передней поверхностью инструмента на участке вторичных пластических деформаций (ВПД) рассматривается как тяжело нагруженная трибосистема. Площадь контакта и её скорость существенно зависят от режимов резания [11, 12]. В соответствии с научным подходом А.В. Чичинадзе и К.Г. Шучева, распределение температуры вдоль длины тяжело нагруженного трибоконтакта описывается на основе анализа поверхностного пластически деформируемого микрообъёма в заготовке (стружке), который рассматривается как зона квазивязкого течения материала. Этот процесс связан с выделением теплоты за счёт вязкой диссипации энергии трения [13]. Основные факторы, которые определяют температуру контакта в реальной системе резания и учитываются в качестве входных параметров в полученной математической модели, могут эволюционировать, например, изменением длины контакта по передней поверхности инструмента при повышении износа, а также проявляться в виде периодических флуктуаций технологических режимов резания.

Периодические флуктуации представляют собой отклонения параметров системы управления, на которые в первую очередь влияют биения шпиндельной группы и кинематические возмущения. В результате биений шпинделя возникают периодические вариации площади срезаемого слоя, что, в свою очередь, приводит к изменению параметров динамической системы резания. Эти данные подтверждаются результатами исследований, проведёнными А.В. Пушем [14]. Колебания параметров относительно их номинальных значений могут вызывать периодические или импульсные изменения температурного распределения на поверхности трибоконтакта «передняя поверхность-стружка», наряду с такими факторами, как адгезионные и диффузионные процессы, а также трибохимические реакции. Таким образом, совокупность значений параметров технологических режимов резания в каждый момент времени обуславливает изменение температуры в системе резания. Исследование этой взаимосвязи основывается как на физико-механических экспериментах, так и на цифровой модели динамики процесса резания [15, 16]. В отличие от проведённых ранее исследований, представленные в статье экспериментально-аналитические модели позволяют виртуально оценить изменения температуры, вызванные флуктуациями параметров режимов резания. Определённые с помощью цифровой модели импульсные энергетические нагрузки на инструмент, обусловленные термодинамическими процессами в контактной зоне, могут служить основой для прогнозирования стойкости инструмента и определения режимов резания по критерию минимизации ресурсных затрат на обработку заготовки. При этом цифровая модель системы учитывает экспериментально полученные данные о динамике процесса резания, полученные в ходе натурных испытаний с использованием вибрационного стенда и динамометра, что позволяет достичь наиболее достоверных результатов.

Цель данной работы заключалась в повышении эффективности процесса резания через определение механизма влияния периодических флуктуаций параметров режимов обработки на температуру передней поверхности токарного резца, что является основным показателем развития диффузионного и окислительного видов износа твердосплавного инструмента. Приведённые математические модели и методики позволят в дальнейшем определить такие технологические режимы резания, при которых температурные изменения в зоне контакта «передняя поверхность – стружка» будут минимальны.

Материалы и методы. Эксперименты были проведены в естественных условиях при наружном продольном точении без охлаждения заготовок диаметром $d = 120$ мм из нержавеющей стали 10ГН2МФА с использованием твёрдосплавных пластин марки Т15К6, которые имеют специальное покрытие. Скорость резания составила $V = 130$ м/мин, подача — $s = 0{,}15$ мм/об, а глубина резания — $t = 0{,}5$ мм. Геометрия режущей части была следующей: передний угол $\gamma = 10°$, задний угол $\alpha = 10°$, главный угол в плане $\varphi = 95°$, радиус вершины пластины

составил $r = 0{,}5$ мм. Средняя температура в зоне резания измерялась с использованием метода относительных термо-ЭДС, применяя лабораторный измерительный стенд для токарной обработки модели STD 201.1 и цифровые преобразователи от компании National Instruments, при этом была проведена предварительная калибровка термопары.

Вибрационные характеристики универсального токарного станка 16К20, использовавшегося в экспериментах, фиксировались с помощью вибростенда, который был собран на основе вибропреобразователей А603С01. Для обработки данных использовался внешний модуль АЦП/ЦАП Е14-440, который обеспечивал преобразование сигналов с вибродатчиков, а также усилитель сигнала. Частота дискретизации составила 10 кГц на один канал сбора данных. Датчики устанавливались на резце в трёх ортогональных направлениях относительно заготовки — в продольном, поперечном и тангенциальном. Обработка цифровых данных производилась с использованием Signal Processing Toolbox в программной среде Matlab.

Модель динамической системы резания представляется совокупностью трех взаимосвязанных подсистем. Первая подсистема обеспечивает движение режущего инструмента относительно заготовки, задавая технологические режимы резания, а также инерционно-диссипативные свойства системы. Вторая подсистема отвечает за упругие деформации и силы резания, действующие на режущий инструмент. Третья подсистема реализует блок формирования неуправляемых возмущений, источником которых являются кинематические возмущения со стороны приводной системы станка и биения шпиндельного узла [15].

Неуправляемые возмущения оказывают влияние на результирующий вектор скорости движения вершины инструмента относительно заготовки, а также на силу резания инструмента. При моделировании динамики процесса обработки необходимо раскрыть формирование значений параметров скорости резания V (мм/с), скорости подачи s (мм/об) и глубины резания t (мм). Для каждого параметра они представляются суммой значения, заданного системой управления (V_0, s_0, t_0), деформационных смещений δ (мм) и скоростей деформационных смещений $\eta = dH/d = \{\eta_X, \eta_Y, \eta_Z\}$ (мм/с), а также вибрационных возмущений $\Delta = \{\Delta_X, \Delta_Y, \Delta_Z\}$ (мм). Вибрационные возмущения по своей структуре являются периодическими функциям времени и могут быть представлены в виде:

$$\Delta_i(\mathrm{t}) = \sum_{n=1}^{k} A_n \, sin(\omega_n t),$$

$$\nu_i^{\Delta}(t) = d\Delta_i / dt = \sum_{n=1}^{k} A_n \omega_n \, cos(\omega_n t),$$

где A_n, ω_n — соответственно амплитуды и частоты осцилляторов, возмущающих движение инструмента в направлениях $i = \{X, Y, Z\}$, определяемые экспериментальным путем. Итоговое представление технологических режимов резания моделируется в следующем виде:

$$V = V_0 - \eta_Z + \nu_{\mathrm{Z}}^{\Delta};$$
$$s = \int_{\tau-\tau_0}^{\tau} \left(\mathrm{V}_2 - \eta_X + \nu_{\mathrm{X}}^{\Delta}\right) d\tau;$$
$$t = t_0 - \mathrm{H}_Y + \Delta_Y,$$

где $\tau_0 = 1/\Omega$ — время одного оборота детали, *с;* Ω — частота оборота детали, Гц; $V_2 = s_0 \cdot \Omega$, мм/с.

Эволюционное изменение длины контакта $l_к$ по передней фаске и износа по задней поверхности пластины $h_з$ определялось использованием металлографического инвертированного микроскопа ЛабоМет-И4, который был оснащён системой цифровой визуализации. При этом учитывались геометрические параметры пластины. Коэффициент усадки стружки оценивался с помощью весового метода с использованием лабораторных весов типа Масса-К-150-1.

Для построения теоретического температурного распределения на длине контакта использовалась зависимость, предложенная Чичинадзе-Шучевым:

$$T(x,h) = \left(\frac{\omega_{01}}{k_1 + m_1} + \frac{\omega_{02}}{\frac{x}{V_C} \cdot k_2^3 \cdot a_2} \cdot \left(\frac{x}{V_C} \cdot k_2^3 \cdot a_2 + 1 - 2 \cdot k_2 \cdot \sqrt{a_2 \cdot \frac{x}{V_C}} \cdot \frac{1}{\pi} - exp\left(\frac{x}{V_C} \cdot k_2^2 \cdot a_2 \right) \cdot erfc(k_2 \cdot \sqrt{a_2 \cdot \frac{x}{V_C}}) \right) \right) \cdot$$
$$\left(\lambda_1 \cdot m_1 + \frac{2 \cdot \lambda_2}{\pi \cdot a_2 \cdot \frac{x}{V_C}} \right)^{-1}, \qquad (1)$$

где $x = 0 \ldots l_k / 2$; ω_{02} — начальная плотность источника тепловыделения в заготовке:

$$\omega_{02} = \frac{q_0 \cdot k \cdot t_H}{t_{пл} \cdot h \cdot \left(1 - exp\left(-k \cdot \frac{t_H}{t_{пл}}\right)\right)}, \quad (2)$$

где h — толщина пластически деформированного слоя в стружке; ω_{01} — максимальная объемная плотность источника тепловыделения от сил трения в теле инструмента, Вт/м^3; q_0 — удельная мощность трения для передней поверхности, Вт/м^2; $k_{1,2}$ — коэффициенты локализации источника теплопоглощения для инструмента и обрабатываемого материала соответственно, м$^{-1}$; a_2 — коэффициент температуропроводности заготовки, м²/с; $\lambda_{1,2}$ — коэффициент теплопроводности твёрдого сплава и материала заготовки соответственно, Вт/м·°С; V_c — скорость движения стружки по передней поверхности, м/с; τ_k — средние касательные напряжения на передней поверхности, Па; $t_{пл}$ – температура плавления материала заготовки, °С; k — температурный коэффициент, °С, k=7,143·10^{-4} · $t_{пл}$; t_H — разница температур внутри пластически деформированного слоя, °С; h — толщина зоны вторичных пластических деформаций в стружке, м.

$$m_1 = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\lambda_1 \cdot \left(\frac{A_k}{P_k}\right)}},$$

где $A_к$ — площадь контакта, м^2; P_k — периметр контакта, м; α_1 — коэффициент теплоотдачи инструментального материала, м^2/°С.

Расчёт температурного распределения по зависимости (1) осуществлялся с учётом изменения толщины пластически деформированного слоя вдоль длины контакта. Характер зависимости $h = f(x)$ определялся отдельно для каждого из сочетаний параметров V, s и t в момент флуктуации путём моделирования деформационных процессов в стружке методом конечных элементов по методике [17].

Результаты исследования. Увеличение длины контакта на передней поверхности резца за счёт процессов изнашивания способствует росту температуры, которая достигает своих максимальных значений по мере приближения системы резания к критическому износу. По результатам натурного эксперимента величины критического износа по задней поверхности инструмента $h_з$ = 0,12 мм (рис. 1 *а*) система резания достигает за 24 минуты, длина контакта по передней поверхности к этому моменту составляет $l_к$ = 0,445 мм (рис. 1 *б*), длина участка ВПД $l_1 = l_к/2$ = 0,2225 мм.

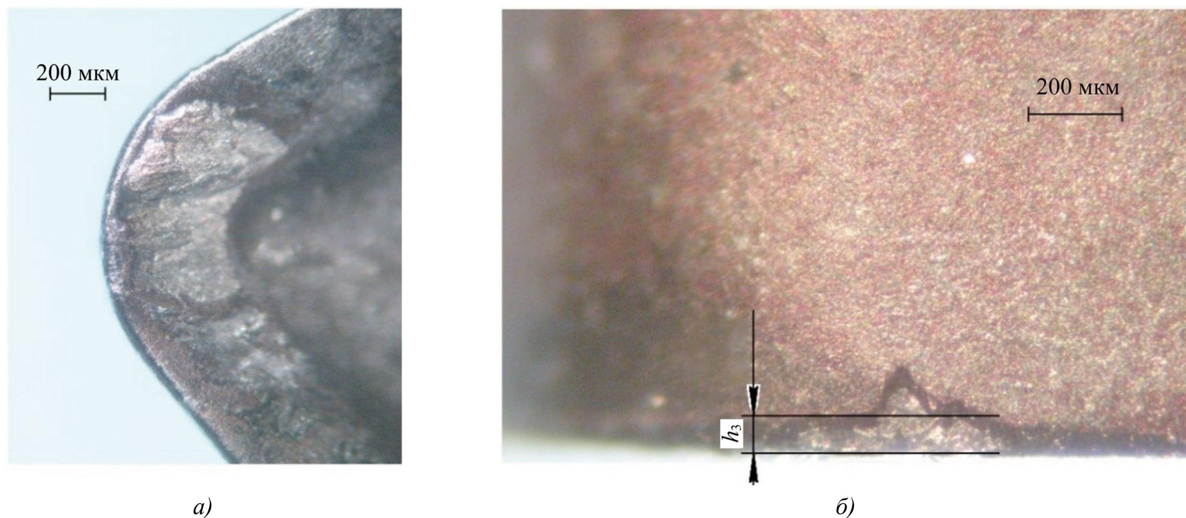


Рис. 1. Оценка износа рабочих граней пластины:
а — участок контакта на передней поверхности;
б — участок контакта на задней поверхности

На рис. 2 *а* представлено изменение температуры в режиме реального времени для последнего прохода стойкостных испытаний. Время обработки для каждого прохода составляло 5,97 минут, а длина линейного участка обработанной поверхности заготовки — 300 мм. Было зафиксировано увеличение температуры как с течением времени в ходе каждого опыта (рис. 2 *б*), так и повышение средней температуры в эксперименте с ростом числа выполненных режущей пластиной проходов. Средняя фактическая температура в зоне резания для последнего прохода составила $T_{ср}$ = 921 °С при средней амплитуде 27,6 °С (рис. 2 *б*).

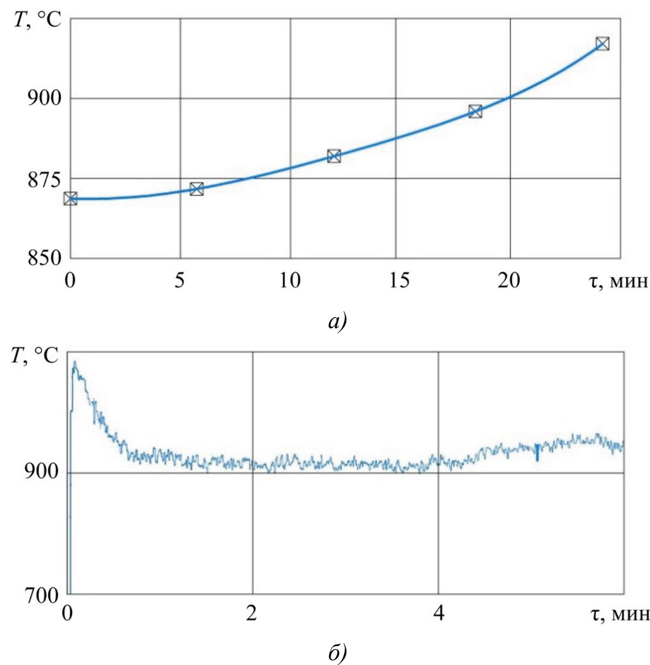


Рис. 2. Оценка термодинамического состояния зоны резания при стойкостных испытаниях:
а — средние температуры для каждого выполненного прохода; *б* — температура в зоне резания для последнего прохода

Значения коэффициента усадки стружки по результатам натурного эксперимента составляют 2,61–2,85, что подтверждает адекватность применяемых для моделирования расчётных значений K_a (таблица 1). На основании анализа и обработки данных колебательных ускорений (рис. 3 *а*) определён спектр их мощности, который представлен в относительных единицах к дисперсии на рис. 3 *б*.

На спектральной характеристике хорошо видны три основных всплеска, которые фактически определяют основные резонансные частоты системы на основании данных измерительного комплекса, установленного на суппортной системе станка.

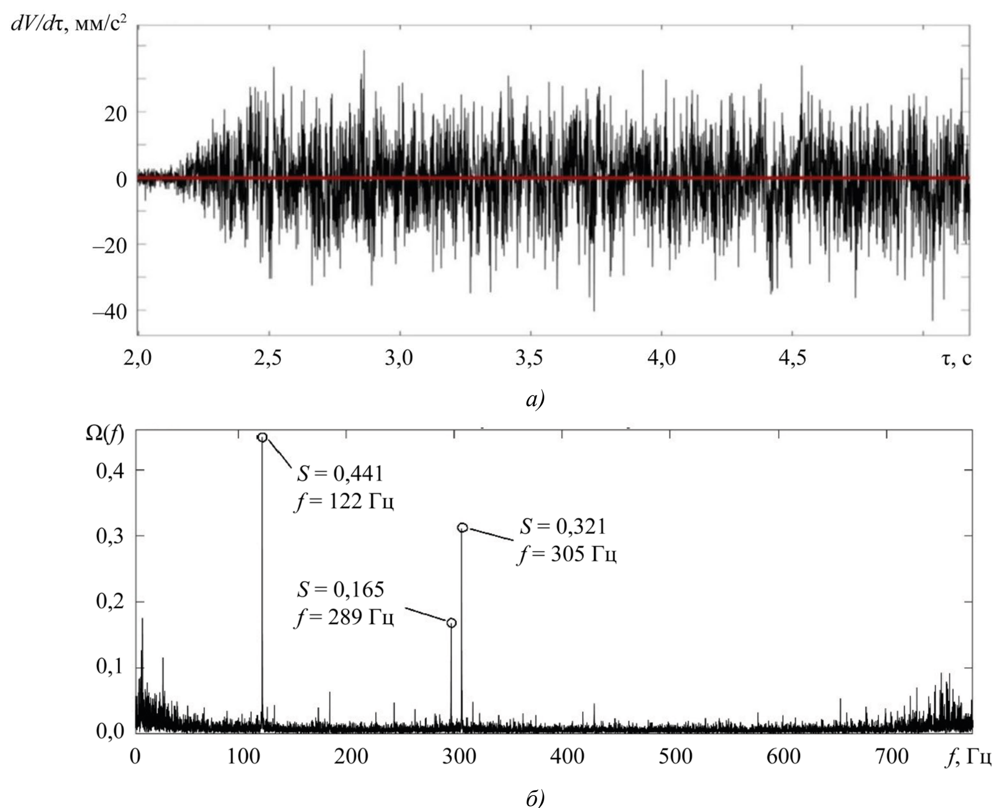


Рис. 3. Экспериментально измеренные характеристики процесса резания:
а — колебательные ускорения вершины инструмента в тангенциальном направлении;
б — спектр сигнала вибраций $dV/d\tau$

После идентификации параметров вибрационных возмущений рассмотрим их влияние на траектории технологических режимов резания в цифровой имитационной модели процесса резания на примере изменения траекторий скорости резания (рис. 4).

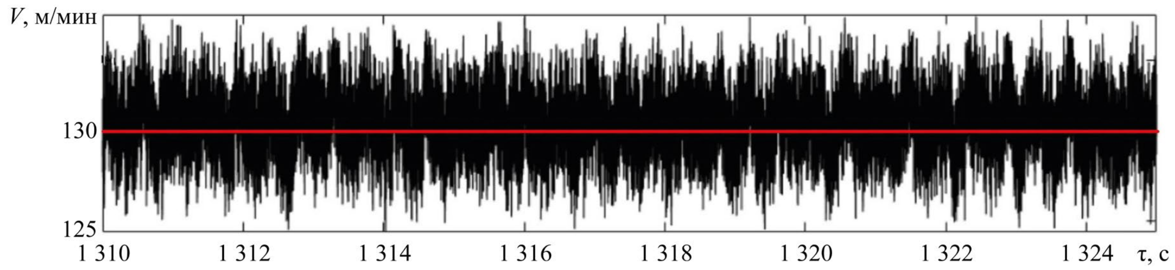


Рис. 4. Пример траекторий скорости резания *V* с учётом вибраций в цифровой модели

Анализ динамики системы на этапе стабилизации интенсивности изнашивания инстурмента (τ = 20–25 мин) в моменты экстремальных флуктуаций режимов резания показал, что максимальная расчётная температура передней поверхности $T_{ПП}^{max}$, достигаемая согласно зависимости (1) при $x = l_1$ для номинальных значений параметров *V*, *s* и *t,* составляет 1097,25 °C (таблица 1).

Таблица 1

Расчётные значение параметров процесса резания в моменты флуктуаций

Состояние параметра в момент флуктуации	*V*, м/мин	*s*, мм/об	*t*, мм	K_a	$V_с$, м/мин	$T_{ПП}^{max}$, °C	A_T, °C
номинальное	130	0,15	0,5	2,797	46,47	1097,25	–
V→max	135,1	0,151	0,541	2,861	47,08	1100,31	18,130
V→min	124,4	0,189	0,524	2,641	49,23	1115,38	
s→max	130,5	0,225	0,548	2,524	51,47	1141,75	61,919
s→min	132,1	0,101	0,463	3,101	42,03	1079,83	
t→max	133,8	0,177	0,552	2,658	48,90	1112,37	15,120
t→min	132,7	0,146	0,446	2,861	45,43	1098,56	

Рассмотрим максимум скорости резания V_{max} = 135,1 м/мин, который по результатам цифрового моделирования периодически повторяется на исследуемом временном отрезке. Подача и глубина резания в этот момент принимают значения *s* = 0,151 мм/об и *t* = 0,541 мм (рис. 5 *а, б, в*).

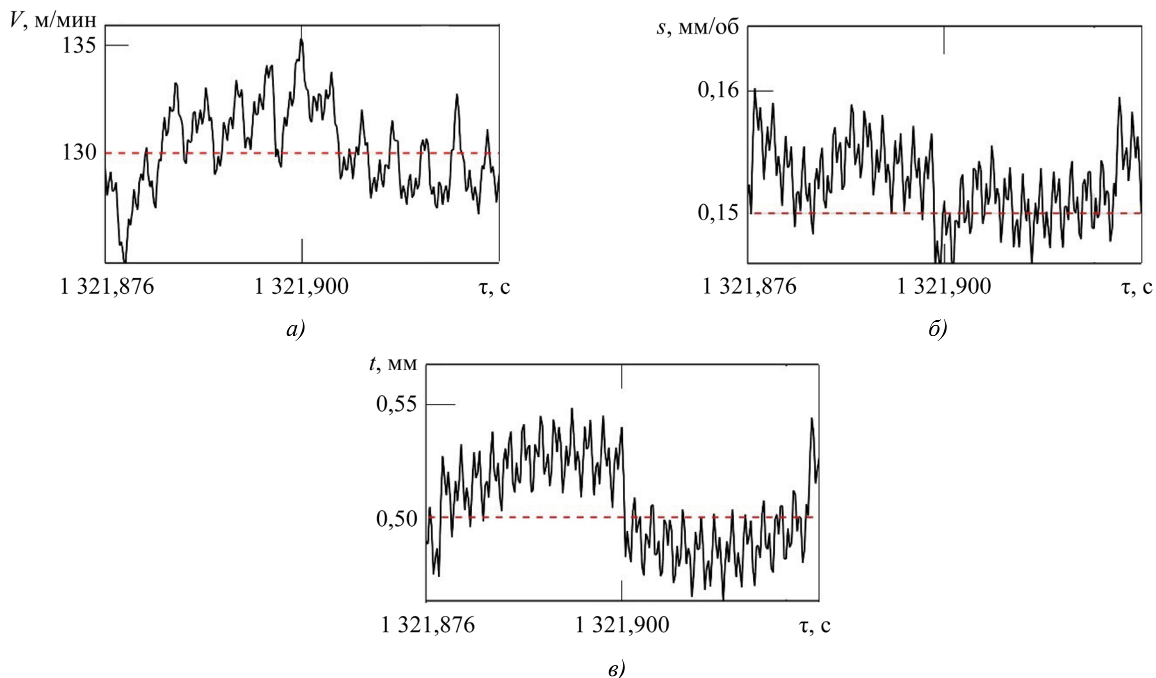


Рис. 5. Значения режимов резания при максимальной скорости резания:
а — скорость резания; *б* — скорость подачи; *в* — глубина резания

https://vestnik-donstu.ru

В результате такой комбинации режимов резания максимальная температура контакта в момент флуктуации незначительно возрастает (таблица 1). Когда скорость резания достигает наименьшего значения (124,4 м/мин), сопутствующее изменение параметров *s* и *t* приводит к увеличению максимальной температуры до 1 115,38 °С, как показано в таблице 1. Температурные колебания в этом случае достигают A_T = 18,13 °С. При экстремальных значениях глубины резания в совокупности с изменением скорости и подачи в этот момент наблюдается рост температуры контакта максимум до 1 112,37 °С (таблица 1). Наибольшее влияние на температуру передней поверхности в исследуемой системе резания оказывают экстремальные значения подачи в момент флуктуации (рис. 6 *а, б, в*).

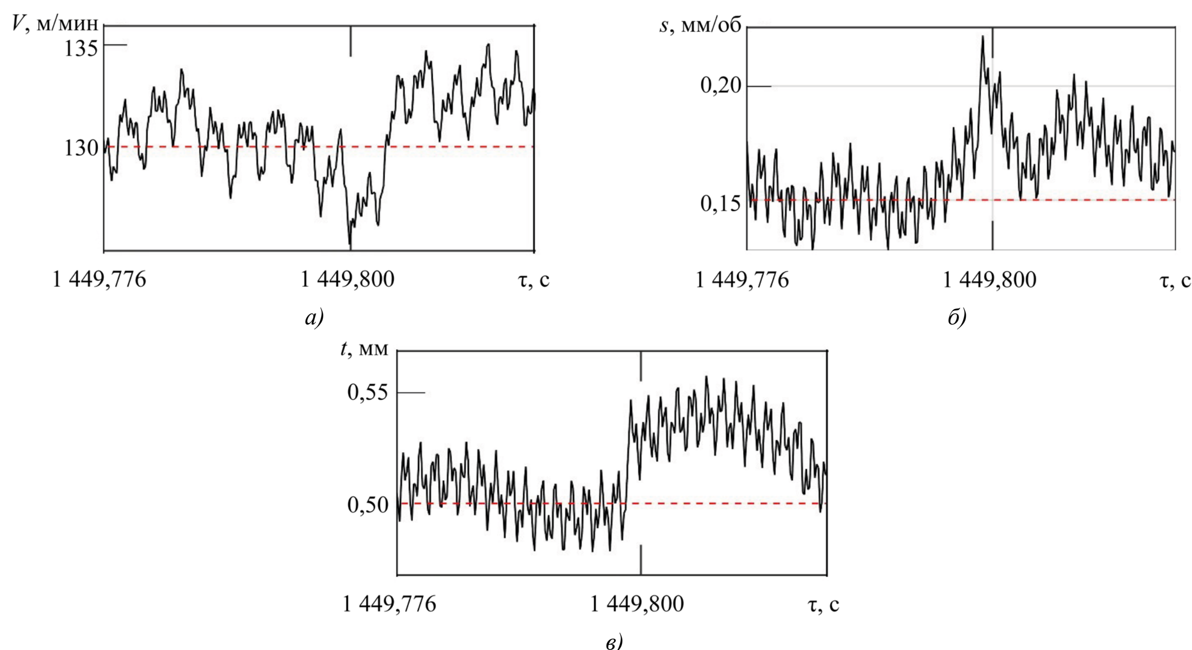


Рис. 6. Значения режимов резания при максимальной подаче:
а — скорость резания; *б* — скорость подачи; *в* — глубина резания

Сочетание режимов обработки при достижении параметром *s* максимума приводит к повышению температуры контакта $T_{ПП}^{max}$ до 1 141,75 °С, при минимальной же подаче наблюдается её снижение до 1 079,83 °С (таблица1).

Кривые, характеризующие распределение температуры вдоль длины трибоконтакта на передней поверхности, согласно зависимости (1), представлены на рис. 7. Для начальной точки оси *x* указаны расчётные значения температуры, получаемой за счёт тепловыделения в зоне *первичных пластических деформаций* (ППД).

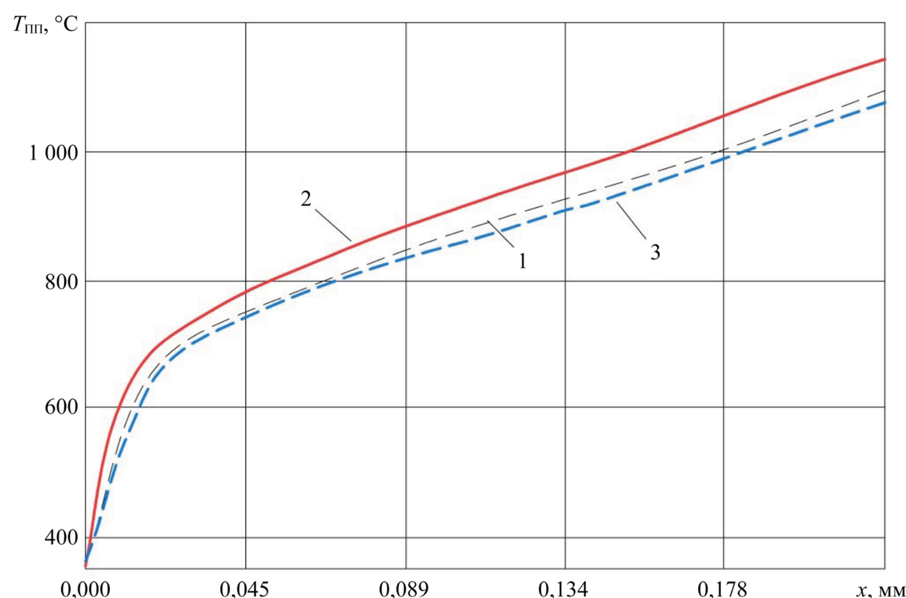


Рис. 7. Распределение температуры на участке ВПД на передней поверхности при номинальном (1), максимальном (2) и минимальном (3) значении подачи *s*

Обсуждение и заключение. В ходе проведения комбинированного эксперимента были зафиксированы изменения траекторий режимов обработки, которые вызваны вибрационными возмущениями в исследуемой системе резания. В работе определены значения этих изменений для квазистатических моментов, когда скорость, подача или глубина срезаемого слоя в результате флуктуаций достигают своих экстремальных значений. Установлено, что при максимальной амплитуде отклонения подачи на всем участке временной траектории наблюдается наибольшая вариация температуры на передней поверхности инструмента. В рассматриваемом сценарии значительное отклонение подачи в сочетании с флуктуацией глубины резания приводит к периодическому перераспределению сил резания и существенному изменению динамики деформационных процессов в зоне первичных пластических деформаций.

В результате этих явлений наблюдаются наибольшие отклонения коэффициента усадки стружки K_a и скорости её скольжения V_c, что в значительной степени влияет на температуру контакта в трибосистеме «передняя поверхность резца — стружка». Интересно отметить, что при максимальных значениях скорости и глубины резания происходят наименьшие изменения температуры, поскольку сочетание фактических режимов обработки в момент подобных флуктуаций позволяет нивелировать возможные значительные отклонения температуры трибоконтакта. Таким образом, исследуемая система резания при заданных режимах обработки, оказывается подверженной вибрационным характеристикам привода подач, которые становятся причиной нежелательных температурных флуктуаций на передней поверхности резца.

Это утверждение вызывает необходимость пересмотра традиционного понимания зависимости температуры процесса резания от технологических режимов обработки, особенно учитывая, что скорость резания считается наиболее значимым параметром, определяющим изменения температуры в контактной зоне. Однако следует отметить, что большинство исследований по данной теме базируется на однофакторных экспериментах, где изменяется лишь один параметр системы резания и оценивается его вклад в изменение температуры, в то время как влияние вибраций, генерируемых самой системой, на динамику тепловыделения до сих пор остается неопределенным [18, 19]. Таким образом, фактически анализируется интегральное значение температуры.

Результаты настоящего исследования раскрывают особенности взаимосвязи между технологическими режимами резания и температурой, рассматривая ее не как интегральное значение, а как изменяющуюся траекторию. Эта траектория демонстрирует периодический процесс постоянного накопления энергии и её выделения в зоне резания, зависимости которого от флуктуаций режимов резания, вызванных кинематическими возмущениями, чрезвычайно важны. Флуктуации в траекториях движения инструмента относительно детали способствуют увеличению амплитуды температурных колебаний, что, в свою очередь, приводит к локальному перегреву инструмента и увеличению интенсивности износа материала инструмента на фоне роста амплитуды сигнала термо-ЭДС.

Таким образом, результаты проведенного исследования подчеркивают необходимость анализа влияния периодических возмущений на импульсные изменения контактной температуры в зоне обработки. Предложенная модель взаимосвязи между вибрациями инструмента и температурой в зоне резания открывает новые горизонты для выбора оптимальных режимов точения с целью минимизации износа инструмента на основе анализа вычисленных температурных изменений по сигналу вибрационной активности инструмента. Такие экспериментальные результаты могут послужить фундаментальными данными для разработки нового подхода к оценке температуры в зоне резания, который бы учитывал широкий диапазон значений технологических режимов.

Использование амплитуды температурных колебаний в системах мониторинга и компенсации вибраций в качестве дополнительного параметра для оценки оптимальности режимов резания способно значительно улучшить стабильность процесса и снизить температуру в зоне резания. Данный подход особенно актуален для металлорежущих станков, находящихся в эксплуатации на протяжении длительного времени, которые характеризуются значительными периодическими возмущениями системы резания со стороны приводов подач и главного движения.

Список литературы / References

1. Фоминов Е.В., Алиев М.М., Шучев К.Г., Фоменко А.В. Влияние покрытий на основе нитридов циркония и титана на трибодеформационные процессы трения в условиях резания твердосплавными пластинами. *Трение и износ.* 2024;45(1):29–37. https://doi.org/10.32864/0202-4977-2024-45-1-29-37

Fominov EV, Aliev MM, Shuchev KG, Fomenko AV. The Influence of Zirconium and Titanium Nitrides Based Coatings on Tribodeformation Processes of Friction While Cutting by Carbide Inserts. *Journal of Friction and Wear*. 2024;45(1):29–37. https://doi.org/10.32864/0202-4977-2024-45-1-29-37

2. Лебедев В.А., Алиев М.М., Фоминов Е.В., Фоменко А.В., Марченко А.А., Мироненко А.Е. Термоэлектрические характеристики процесса точения стальных заготовок твердосплавными пластинами с комбинированными покрытиями. *Трение и износ.* 2023;44(2):114–121. https://doi.org/10.32864/0202-4977-2023-44-2-114-121

Lebedev VA, Aliev MM, Fominov EV, Fomenko AV, Marchenko AA, Mironenko AE. Thermoelectric Characteristics of the Process Steel Turning by Carbide Inserts with Combined Coatings. *Journal of Friction and Wear*. 2023;44(2):114–121. https://doi.org/10.32864/0202-4977-2023-44-2-114-121

3. Zhu M, Achache S, Motta MP, Delblouwe A, Pelaingre C, García-Wong AC, et al. Characteristics and Cutting Performance of CVD Al_2O_3 Multilayer Coatings Deposited on Tungsten Carbide Cutting Inserts in Turning of 24CrMoV5-1 Steel. *Coatings*. 2023;13(5):883. https://doi.org/10.3390/coatings13050883

4. Rajeswari R. Investigation on the Effect of Turning of AISI 304 Stainless Steel Using MQL Technique with Corn Oil as Cutting Fluid and Comparison with Dry Condition. *Engineering Proceedings.* 2024;61(1):35. https://doi.org/10.3390/engproc2024061035

5. Roy S, Kumar R, Panda A, Sahoo AK, Rafighi M, Das D. A Comparative Performance Investigation of Single- and Double-Nozzle Pulse Mode Minimum Quantity Lubrication Systems in Turning Super-Duplex Steel Using a Weighted Pugh Matrix Sustainable Approach. *Sustainability.* 2023;15(20):15160. https://doi.org/10.3390/su152015160

6. Abbas AT, Al-Abduljabbar AA, El Rayes MM, Benyahia F, Abdelgaliel IH, Elkaseer A. Multi-Objective Optimization of Performance Indicators in Turning of AISI 1045 under Dry Cutting Conditions. *Metals.* 2023;13(1):96. https://doi.org/10.3390/met13010096

7. Özbek O. Evaluation of Nano Fluids with Minimum Quantity Lubrication in Turning of Ni-Base Superalloy UDIMET 720. *Lubricants.* 2023;11(4):159. https://doi.org/10.3390/lubricants11040159

8. Arun KK, Navaneeth VR, Prabhu S, Ramesh Kumar M, Giriraj M. Experimental Investigation of Turning Process Parameter under Several Cutting Conditions for Duplex Steels for Minimization of Cutting Temperature. *Materials Today: Proceedings.* 2022;62(4):1917–1920. https://doi.org/10.1016/j.matpr.2022.01.447

9. Demirpolat H, Binali R, Patange AD, Pardeshi SS, Gnanasekaran S. Comparison of Tool Wear, Surface Roughness, Cutting Forces, Tool Tip Temperature, and Chip Shape during Sustainable Turning of Bearing Steel. *Materials.* 2023;16(12):4408. https://doi.org/10.3390/ma16124408

10. Lapshin VP. Turning Tool Wear Estimation Based on the Calculated Parameter Values of the Thermodynamic Subsystem of the Cutting System. *Materials.* 2021;14(21):6492. https://doi.org/10.3390/ma14216492

11. Grzesik W. *Advanced Machining Processes of Metallic Materials: Theory, Modelling, and Applications,* 2nd edition. Amsterdam: Elsevier; 2017. 608 p.

12. Juneja BL, Sekhon GS, Seth N. *Fundamentals of Metal Cutting and Machine Tools,* 2nd edition. Delhi: New Age International Publishers; 2017. 626 p.

13. Рыжкин А.А., Чичинадзе А.В., Шучев К.Г., Филипчук А.И., Климов М.М. Температурный режим при трении инструментальных материалов с учётом объёмности источника тепловыделения. *Трение и износ.* 1986;7(3):398–407.

Ryzhkin AA, Chichinadze AV, Shuchev KG, Filipchuk AI, Klimov MM. Temperature Conditions during Friction of Tool Materials Taking into Account the Volumetric Heat Source. *Journal of Friction and Wear.* 1986;7(3):398–407. (In Russ.)

14. Пуш А.В. Особенности статистического моделирования выходных характеристик металлорежущих станков. *СТИН. Станки, инструмент.* 1995;(10):18–22.

Push AV. Features of Statistical Modeling of Output Characteristics of Metal-Cutting Machines. *STIN. STanki Instrument.* 1995;(10):18–22. (In Russ.)

15. Zakovorotny VL, Gvindjiliya VE. The Influence of the Vibration on the Tool Shape-Generating Trajectories When Turning. *Metal Working and Material Science*. 2019;21(3):42–58. http://doi.org/10.17212/1994-6309-2019-21.3-42-58

16. Altintas Y, Aslan D. Integration of Virtual and On-Line Machining Process Control and Monitoring. *CIRP Annals.* 2017;66(1):349–352. https://doi.org/10.1016/j.cirp.2017.04.047

17. Fominov E, Marchenko A, Suhomlinova V, Pyatnickaya O, Gladkih D. Modeling of the Temperature Distribution on the Lathe Front Surface Taking into Account Geometric Parameters of the Secondary Plastic Zone. *Transport Engineering.* 2023;14(2):4–11. https://doi.org/10.30987/2782-5957-2023-2

18. Masafumi Kikuchi. The Use of Cutting Temperature to Evaluate the Machinability of Titanium Aloys. *Acta Biomaterialia.* 2009;5(2):770–775. https://doi.org/10.1016/j.actbio.2008.08.016

19. Karaguzel U, Budak E. Investigating Effects of Milling Conditions on Cutting Temperatures through Analytical and Experimental Methods. *Journal of Materials Processing Technology.* 2018;262:532–540. https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2018.07.024

Об авторах:

Евгений Валерьевич Фоминов, кандидат технических наук, доцент, и.о. заведующего кафедрой инженерной и компьютерной графики, доцент кафедры металлорежущих станков и инструментов Донского государственного технического университета, (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), SPIN-код, ORCID, ScopusID, ResearcherID, fominoff83@mail.ru

Валерия Енвериевна Гвинджилия, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры автоматизации производственных процессов Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), SPIN-код, ORCID, ScopusID, ResearcherID, vvgvindjiliya@donstu.ru

Андрей Анатольевич Марченко, аспирант кафедры металлорежущих станков и инструментов Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), SPIN-код, ORCID, ScopusID, tobago13@yandex.ru

Константин Григорьевич Шучев, кандидат технических наук, профессор, профессор кафедры металлорежущих станков и инструментов Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), SPIN-код, ORCID, ScopusID, cshuchev53@mail.ru

Заявленный вклад авторов:
Е.В. Фоминов: разработка концепции; проведение исследования.
В.Е. Гвинджилия: разработка концепции; формальный анализ.
А.А. Марченко: проведение исследования; написание черновика рукописи.
К.Г. Шучев: научное руководство.

About the Authors:
Evgeny V. Fominov, Cand.Sci. (Eng.), Associate Professor, Acting Head of the Engineering and Computer Graphics Department, Associate Professor of the Metal-Cutting Machines and Tools Department, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), SPIN-code, ORCID, ScopusID, ResearcherID, fominoff83@mail.ru

Valery E. Gvindjilia, Cand.Sci. (Eng.), Senior Lecturer of Production Automation Department, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), SPIN-code, ORCID, ScopusID, ResearcherID, vvgvindjiliya@donstu.ru

Andrey A. Marchenko, postgraduate student of the Metal-Cutting Machines and Tools Department, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), SPIN-code, ORCID, ScopusID, tobago13@yandex.ru

Constantine G. Shuchev, Cand.Sci. (Eng.), Professor of the Metal-Cutting Machines and Tools Department, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), SPIN-code, ORCID, ScopusID, cshuchev53@mail.ru

Claimed Contributorship:
EV Fominov: conceptualization, investigation.
VE Gvindjiliya: conceptualization, formal analysis.
AA Marchenko: investigation, writing – original draft preparation.
CG Shuchev: supervision.

Conflict of Interest Statement: **the authors do not have any conflict of interest.**

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 25.12.2024
Поступила после рецензирования / Reviewed 18.01.2025
Принята к публикации / Accepted 22.01.2025

МАШИНОСТРОЕНИЕ И МАШИНОВЕДЕНИЕ
MACHINE BUILDING AND MACHINE SCIENCE





УДК 531.788
https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-43-51

Оригинальное эмпирическое исследование

Исследование оптимальной глубины вакуума, создаваемой эжектором в зависимости от величины питающего давления



EDN: MPXOWG

С.И. Савчук, Э.Д. Умеров✉, А.У. Абдулгазис
Крымский инженерно-педагогический университет имени Февзи Якубова, г. Симферополь, Республика Крым
✉ Ervin777@yandex.ru

Аннотация

Введение. Вакуумные эжекторы, работающие по принципу Вентури, применяются в различных отраслях промышленности и являются незаменимыми пневматическими устройствами. Важной характеристикой вакуумного эжектора является создаваемая глубина вакуума, где максимальное значение вакуума достигается в определенном интервале питающего давления. Несоблюдение питающего давления влияет на производительность самого эжектора и автоматизированных вакуумных систем в целом. Одним из вариантов решения данной проблемы является установление рекомендуемого диапазона питающего давления в достаточно узком интервале давлений, при котором достигается гарантированное значение глубины вакуума, не используя максимальные возможности эжектора. При этом в технической литературе не приводятся значения зависимости глубины вакуума от питающего давления на всем диапазоне работы эжектора, на которые авторы хотели бы обратить внимание в рамках данной работы. Цель работы — проведение экспериментальных исследований по установлению фактических значений максимальной глубины вакуума в зависимости от величины входного давления эжектора.

Материалы и методы. Для проведения экспериментальных исследований был спроектирован, изготовлен и использован специальный стенд, позволяющий осуществлять исследования вакуумных эжекторов, работающих на основе принципа Вентури. Данный стенд позволяет установить точное значение вакуума в зависимости от входного питающего давления для эжекторов, имеющих диаметр сопла от 0,1 до 4,0 мм, что полностью перекрывает весь диапазон эжекторов, применяемых в реальных секторах экономики. Были исследованы вакуумные эжекторы семейств VEB, VEBL, VED и VEDL производства компании Camozzi в интервале входного питающего давления эжектор от 2,0 до 6,5 бар. Экспериментально определялись фактические значения глубины вакуума в зависимости от величины входного питающего давления для каждого эжектора, а также максимальные значения глубины вакуума, достигаемые каждым эжектором при соответствующем значении входного питающего давления.

Результаты исследования. Экспериментально доказано, что рекомендуемые значения входного питающего давления приведенных в каталогах фирм производителей эжекторов не всегда соответствует действительным значениям. Показано, что отличается и характер полученных графиков. В этой связи необходимо вводить корректировку величины входного питающего давления для достижения максимальной глубины вакуума для каждого типа эжектора.

Обсуждение и заключение. Результаты проведенных экспериментальных исследований позволяют осуществлять рациональный выбор вакуумных эжекторов в зависимости от требуемых технологических задач. Это гарантированно обеспечит работоспособность автоматизированных вакуумных систем и производительность самого эжектора. Результаты исследований могут быть использованы всеми фирмами изготовителями эжекторов для корректировки их базовых каталогов и соответствующих рекомендаций по применению этих изделий.

Ключевые слова: глубина вакуума, вакуумный эжектор, питающее давление эжекторов

Благодарности. Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам и редколлегии журнала за внимательное отношение к статье и указанные замечания, которые позволили улучшить качество статьи.

Для цитирования. Савчук С.И., Умеров Э.Д., Абдулгазис А.У. Исследование оптимальной глубины вакуума, создаваемой эжектором в зависимости от величины питающего давления. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2025;25(1):43–51. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-43-51

Original Empirical Research

Investigation of the Optimal Vacuum Depth Created by an Ejector Depending on the Value of the Supply Pressure

Sergey I. Savchuk, Ervin D. Umerov ✉, Aziz U. Abdulgazis
Crimean Engineering and Pedagogical University named after Fevzi Yakubov, Simferopol, Republic of Crimea
✉ Ervin777@yandex.ru

Abstract
Introduction. Vacuum ejectors operating on the Venturi principle are used in various industries and are essential pneumatic devices. An important characteristic of a vacuum ejector is the vacuum depth it creates, where the maximum vacuum value is obtained in a certain range of supply pressure. Failure to comply with the supply pressure affects the performance of the ejector itself and automated vacuum systems in general. One of the options for solving this problem is to establish the recommended range of supply pressure in a fairly narrow pressure range, at which a guaranteed value of vacuum depth is reached without using the maximum capabilities of the ejector. At the same time, the technical literature does not provide the values of the dependence of the vacuum depth on the supply pressure over the entire range of ejector operation, which the authors would like to draw attention to in this work. The research objective was to conduct experimental studies on establishing the true values of the maximum vacuum depth depending on the magnitude of the ejector input pressure.
Materials and Methods. To conduct experimental research, a special stand was designed, manufactured and used, which allowed for the study of vacuum ejectors operating on the basis of the Venturi principle. This stand provided setting the exact vacuum value depending on the input supply pressure for ejectors with a nozzle diameter from 0.1 to 4.0 mm, which completely covered the entire range of ejectors used in real sectors of the economy. Vacuum ejectors of the VEB, VEBL, VED and VEDL families manufactured by Camozzi were investigated in the range of the inlet supply pressure of the ejector from 2.0 to 6.5 bar. The true values of the vacuum depth were determined experimentally depending on the value of the input supply pressure for each ejector, as well as the maximum values of the vacuum depth reached by each ejector at the corresponding value of the input supply pressure.
Results. It was experimentally proved that the recommended values of the input supply pressure given in the catalogs of ejector manufacturers did not always correspond to the true values. It was shown that the character of the obtained graphs also differed. In this regard, it was necessary to adjust the value of the input supply pressure to reach the maximum vacuum depth for each type of ejector.

Discussion and Conclusion. The results of the conducted experimental studies allow for a rational choice of vacuum ejectors depending on the required technological tasks. This will ensure the operability of automated vacuum systems and the performance of the ejector itself. The research results can be used by all ejector manufacturers to adjust their basic catalogs and relevant recommendations for the use of these products.

Keywords: vacuum depth, vacuum ejector, supply pressure of ejectors

Acknowledgments. The authors would like to thank the reviewers and the Editorial board of the Journal for their attentive attitude to the article and the comments indicated, which allowed us to improve the quality of the paper.

For citation. Savchuk SI, Umerov ED, Abdulgazis AU. Investigation of the Optimal Vacuum Depth Created by an Ejector Depending on the Value of the Supply Pressure. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2025;25(1):43–51. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-43-51

Введение. В настоящее время в различных отраслях промышленности технологическое перемещение изделий и деталей производится с применением промышленных роботов, оснащенных вакуумными присосками, работа которых осуществляется с помощью эжектора [1], основанного на принципе Вентури. Производителями предлагается большой ассортимент эжекторов [2, 3], которые создают вакуум различной глубины в зависимости от питающего давления [4], что отвечает специфическим потребностям производства.

Оптимальную величину питающего давления воздуха на входе в эжектор, при котором достигается максимальная глубина вакуума, можно определить как оптимальное давление. Отклонение этого давления от заданного значения приводит к снижению глубины вакуума, что, в свою очередь, отрицательно сказывается на производительности как эжектора, так и присоски, а также увеличивает энергетические затраты. Таким образом обеспечение оптимального питающего давления для эжектора с целью достижения максимальной производительности и снижения энергетических расходов становится весьма актуальной задачей.

При изучении эжекторов таких производителей, как Camozzi, Festo, Schmalz, SMC Pneumatics и других, было отмечено, что лишь небольшая часть производителей публикует в своих каталогах точные значения вакуума в зависимости от питающего давления для различных типов эжекторов. В основном информация представлена в виде общей диаграммы, соответствующей всей гамме выпускаемых эжекторов определенного типа, без учета диаметра их сопел.

Практический опыт авторов статьи, а также многолетнее сотрудничество с различными производственными участками, использующими вакуумные эжекторы, позволили выявить значительные расхождения между фактическими и табличными значениями питающих давлений и соответствующими значениями глубины вакуума. Поэтому исследования, направленные на определение точных зависимостей максимальной глубины вакуума, создаваемого эжектором от входного питающего давления, с целью достижения минимальных энергетических затрат представляют значительный интерес. Более глубокое изучение этих параметров возможно при использовании специально созданного экспериментального стенда, позволяющего с высокой степенью точности определять указанные параметры, что, в свою очередь, может способствовать повышению производительности всей системы.

Многочисленные исследования посвящены использованию вакуумных эжекторов [5] и вакуумной техники [6]. Авторы обращают внимание на теорию вакуума [7] и его физические основы [8], однако недостаточно акцентируют внимание на практической стороне его использования. В работе [9] рассматриваются конкретные случаи практического применения вакуума, в [10] представлены экспериментальные исследования с усовершенствованным соплом эжектора, а в [11] — моделирование потоков. Однако в современной научной литературе практически не уделяется внимания вопросам, касающимся зависимости величины получаемого вакуума от входного питающего давления и параметров вакуумных эжекторов. Описание характеристик вакуумных эжекторов можно найти преимущественно в справочной литературе, такой как каталоги производителей вакуумного оборудования, например, итальянской компании Camozzi или немецкой фирмы Schmalz.

В работе [12] предложено изменять геометрические размеры сопла эжекторов, что позволяет увеличивать их производительность. В экспериментальной работе [13] приведены результаты исследования, в котором изменялся угол наклона камеры смешения эжектора, что также способствовало повышению его производительности. В работе [14] автором предпринята попытка исследовать основные характеристики вакуумных эжекторов и была предложена методика экспериментальных исследований, что получило логическое продолжение в работе [15].

Учитывая все вышеизложенное, авторы поставили перед собой цель —проведение экспериментальных исследований для определения фактических значений максимальной глубины вакуума в зависимости от величины входного давления эжектора.

Материалы и методы. Для проведения натурных исследований вакуумных эжекторов был использован специальный стенд [15], разработанный авторами статьи и представленный на рис. 1.

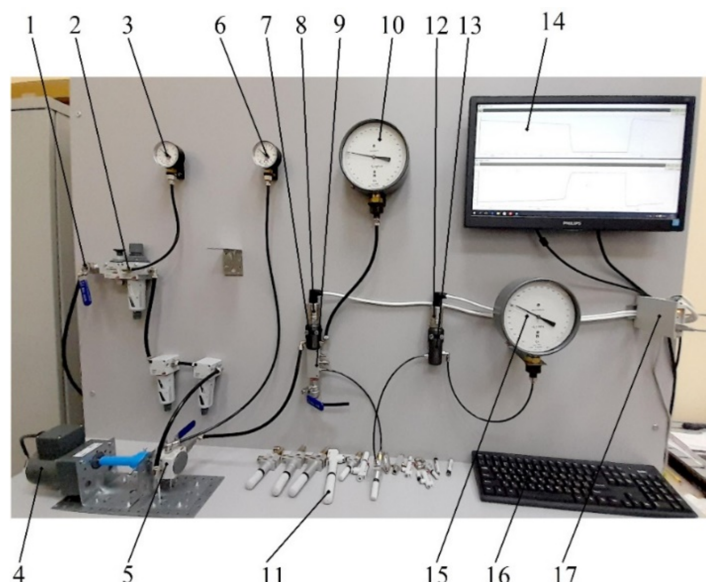


Рис. 1. Стенд для проведения экспериментальных исследований

Таблица 1

Состав стенда для проведения экспериментальных исследований

	Обозначение	Тип/модель
1	Входной воздушный кран	Кран шаровой V2E-316-PP-1/4
2	Входной блок	Модульный блок подготовки воздуха MC104-N-5-FL
3	Контрольный манометр	Манометр M063-R12
4	Электронный привод с регулятором	Мотор-редуктор 80YT25WGV22H/80GK150H с контроллером WS-L (25W)
5	Основной регулятор с запорным краном	Регулятор давления MC104-R05 с краном шаровым V2E-316-PP-1/4
6	Контрольный манометр	Манометр M063-R12
7	Тройник	
8	Датчик давления	Датчик давления МИДА-ДИ-15-RS485-0,15(0,25; 0,5)/0-1,6 МПа-064-M20-DIN C
9	Раздаточный коллектор	Коллектор 3053 1/4-3L-1/8
10	Контрольный манометр	Манометр деформационный образцовый с условной шкалой модель 11202 кл. точности 0,4 16 кГс/см^2); МО
11	Исследуемый эжектор	
12	Датчик абсолютного давления	Датчик давления МИДА-ДА-15-RS485-0,15(0,25; 0,5)/0-0,1 МПа-064-M20-DIN C
13	Тройник	
14	Монитор компьютера	
15	Контрольный вакуумметр	Вакуумметр деформационный образцовый с условной шкалой модель 11201 кл. точности 0,4 (–0,1 мПа); ВО
16	Компьютер	Условно показана только клавиатура
17	Контроллер датчиков	Устройство связи МИДА-УС-410

В рамках исследования были изучены вакуумные эжекторы семейств VEB, VEBL, VED и VEDL, производимые компанией Camozzi [8], в диапазоне входного давления, питающего эжектор, от 2,0 до 6,5 бар. Основной задачей исследования стало установление фактических значений глубины вакуума в зависимости от величины входного питающего давления для каждого из эжекторов. Кроме того, было необходимо экспериментально определить максимальные значения глубины вакуума, которые способны достичь каждый из эжекторов, а также соответствующее этим значениям глубины вакуума входное питающее давление. Полученные параметры впоследствии будут необходимы для проведения следующих серий экспериментов, направленных на установление времени создания вакуума в объеме одного литра при различных заданных глубинах вакуума.

Для каждого эжектора из рассматриваемых семейств было проведено не менее 17 экспериментов. При этом для каждого отдельного эксперимента устанавливалась своя фиксированная скорость вращения маховика основного регулятора давления 5. Цель этих установок заключалась в обеспечении максимальной плавности изменения параметров, а также в исключении пропусков каких-либо значимых событий в ходе эксперимента.

Результаты исследования. Ниже представлены полученные в результате эксперимента графики зависимости изменения глубины вакуума от величины питающего давления по сериям эжекторов (рис. 2–5), а также проведено сравнение полученных данных с аналогичными параметрами эжекторов, предоставленными в каталоге Camozzi.

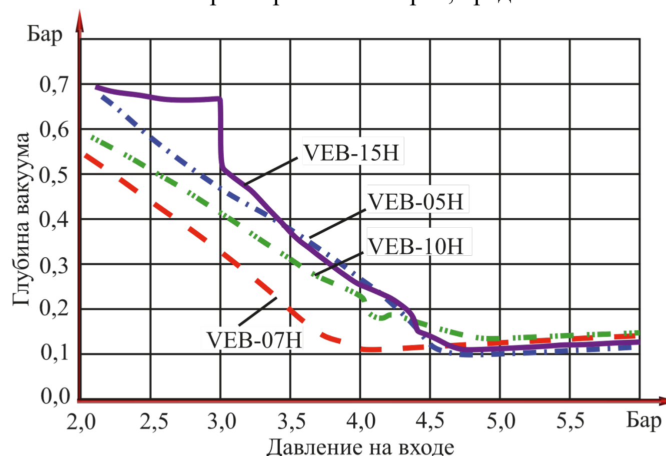


Рис. 2. Диаграммы зависимости изменения глубины вакуума от величины питающего давления для эжекторов серии VEB

Анализ экспериментальных данных показывает, что для эжектора VEB-05H максимальная глубина вакуума достигает величины 90,5 % (остаточное давление 96 мбар) при питающем давлении 4,73–4,74 бара. Согласно информации, приведенной в каталоге производителя для эжектора VEB-05H, оптимальное питающее давление составляет 4,5 бара, при этом должна быть достигнута глубина вакуума в 82 %, что соответствует остаточному давлению 182 мбар. Данное значение согласуется с диаграммой в каталоге производителя, на которой показана зависимость глубины вакуума от величины питающего давления для эжекторов семейства VEB. Авторами установлено, что для эжектора VEB-05H при питающем давлении 4,5 бара (рекомендуемом значении от производителя) глубина вакуума также составляет 88,65 % (остаточное давление 115 мбар).

Что касается эжектора VEB-07H, то экспериментальные данные показали, что его глубина вакуума достигает 89,34 % (остаточное давление 108 мбар) при питающем давлении в диапазоне 4,07–4,08 бара. Сопоставив с данными, предоставленными производителем для эжектора VEB-07H, обнаружили, что оптимальное питающее давление для этого устройства также составляет 4,5 бара, при котором глубина вакуума должна составлять 85 % (остаточное давление 152 мбар). Это значение не соответствует значениям, представленным в каталоге компании, где показана зависимость изменения глубины вакуума от величины питающего давления для эжекторов семейства VEB. Установлено, что при питающем давлении 4,5 бара (рекомендованном значении для эксплуатации эжектора VEB-07H) глубина вакуума достигает 88,65 % (остаточное давление 115 мбар). Таким образом, существующие расхождения между экспериментальными данными и сведениями, предоставленными производителем, требуют дополнительного анализа и могут свидетельствовать о необходимости пересмотра рекомендуемых параметров эксплуатации эжекторов.

Экспериментально установлено, что для эжектора VEB-10H глубина вакуума достигает величины 86,9 % (остаточное давление 132,6 мбар) при питающем давлении 4,9 бара. Данные, предоставленные производителем эжектора VEB-10H, указывают на то, что оптимальное питающее давление составляет 5 бар, при этом глубина вакуума должна достигать 85 % (остаточное давление 152 мбар). Это значение соответствует диаграмме зависимости, представленному в каталоге производителя, которая демонстрирует изменение глубины вакуума в зависимости от величины питающего давления для эжекторов семейства VEB. В процессе исследования авторами установлено, что для эжектора VEB-10H при питающем давлении 5 бар (величине, рекомендованной как оптимальная для эксплуатации этого устройства) глубина вакуума достигает 86,8 % (остаточное давление 133,5 мбар).

Особый интерес представляет необычное поведение графика зависимости в диапазоне питающего давления от 4 до 4,2 бар (рис. 3).

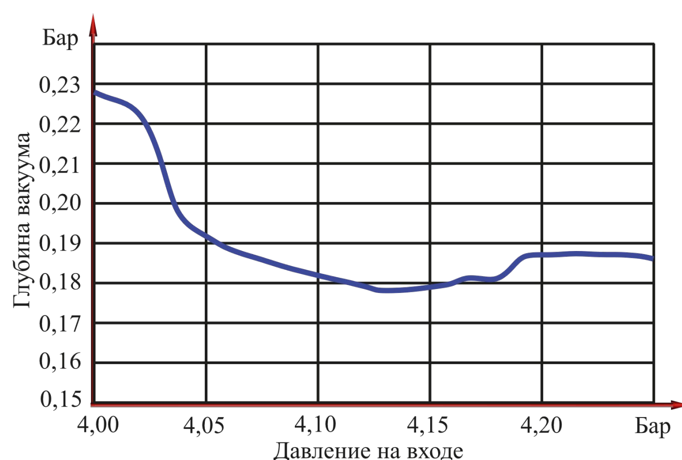


Рис. 3. Необычное поведение графика

Для эжектора VEB-15H экспериментально установлено, что глубина вакуума достигает величины 89,24 % (остаточное давление 109 мбар) при питающем давлении 4,75 бара. Данные, предоставленные производителем эжектора VEB-15H, указывают на то, что оптимальное питающее давление составляет 4,5 бар при условии, что глубина вакуума достигает 85 % (остаточное давление 152 мбар). Это значение, вероятно, соответствует диаграмме, представленной в каталоге фирмы, которая демонстрирует зависимость изменения глубины вакуума от величины питающего давления для эжекторов семейства VEB. В ходе проведенных исследований было установлено, что для эжектора VEB-15H при питающем давлении 4,5 бара, рекомендованном производителем как оптимальное для его эксплуатации, глубина вакуума достигла 85,69 % (остаточное давление 145 мбар).

Особое внимание следует уделить резкому падению значений вакуума в диапазоне питающего давления от 2,95 до 3,0 бара (рис. 2). Причины данного поведения графика предполагается изучить в будущем в рамках разработки математической модели эжектора.

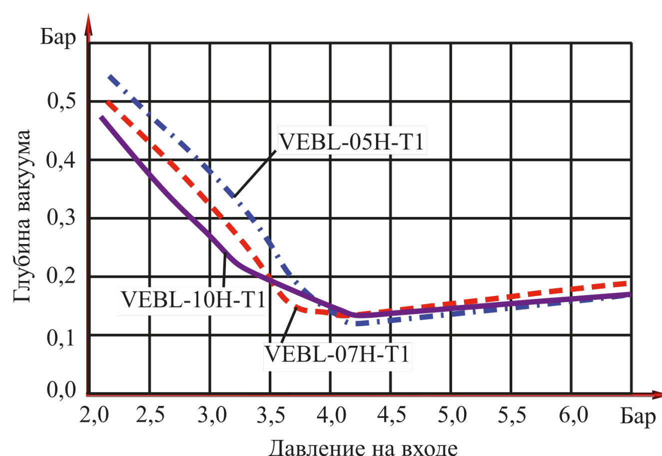


Рис. 4. Диаграммы зависимости изменения глубины вакуума от величины питающего давления для эжекторов серии VEBL

Анализ экспериментальных данных показывает, что для эжектора VEBL-05H-T1 глубина вакуума достигает величины 88,06 % (остаточное давление 121 мбар) при питающем давлении 4,2 бара.

Информация от производителя по эжектору VEBL-05H-T1 указывает на то, что оптимальное питающее давление составляет 4,5 бара, при этом остаточное давление в линии вакуума должно достигать значения 160 мбар. Данные соответствуют графикам, представленным в каталоге производителя, которые демонстрируют зависимость изменения глубины вакуума от величины питающего давления для эжекторов семейства VEBL. В ходе проведённых исследований было установлено, что для эжектора VEBL-05H-T1 при рекомендуемом питающем давлении 4,5 бара остаточное давление в линии вакуума составляет 127 мбар, что соответствует глубине вакуума 87,47 %.

Для эжектора VEBL-07H-T1 экспериментально установлено, что минимальное остаточное давление в линии вакуума достигает величины 133 мбара (86,87 %) при питающем давлении 4,1 бара.

Данные, представленные производителем по эжектору VEBL-07H-T1, указывают на оптимальное питающее давление в 4,5 бара. При этом остаточное давление в линии вакуума должно достигать величины 150 мбар. Это значение подтверждается диаграммой, приведенной в каталоге производителя, которая иллюстрирует зависимость изменений глубины вакуума от величины питающего давления для эжекторов семейства VEBL. Результаты проведенных исследований показывают, что для эжектора VEBL-07H-T1, при питающем давлении 4,5 бара, рекомендованном производителем как оптимальное для его эксплуатации, остаточное давление в линии вакуума составляет 142 мбара, что соответствует глубине вакуума 85,99 %.

Что касается эжектора VEBL-10H-T2, то экспериментально установлено, что минимальное остаточное давление в линии вакуума достигает величины 133 мбар, что соответствует глубине вакуума 86,87 %, при питающем давлении 4,22 бара. Данные, предоставленные производителем для эжектора VEBL-10H-T2, указывают на оптимальное питающее давление в 4,5 бара, при этом остаточное давление в линии вакуума должно достигать величины 150 мбар. Это значение соответствует диаграмме, представленной в каталоге изготовителя, которая иллюстрирует зависимость изменений глубины вакуума от величины питающего давления для эжекторов семейства VEBL. Проведенные исследования показывают, что для эжектора VEBL-10H-T2 при рекомендуемом производителем питающем давлении в 4,5 бара остаточное давление в линии вакуума составляет 138 мбар, что переводится в глубину вакуума 86,38 %.

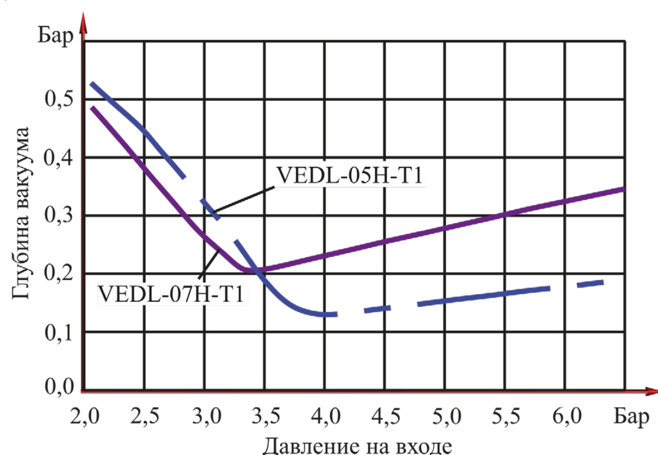


Рис. 5. Диаграммы зависимости изменения глубины вакуума от величины питающего давления для эжекторов серии VEDL

Анализ экспериментальных данных показывает, что для эжектора VEDL-05H-T1 минимальное остаточное давление в линии вакуума достигает величины 130 мбар (глубина вакуума 87,17 %) при питающем давлении 4,0 бара. Данные, приведенные фирмой изготовителем по эжектору VEDL-05H-T1, указывают на оптимальное питающее давление 4,5 бар, при этом в линии вакуума должно быть достигнуто остаточное давление 170 мбар. Это значение соответствует приведенной в каталоге фирмы изготовителя диаграмме зависимости изменения глубины вакуума от величины питающего давления для эжекторов семейства VEDL. Проведенные исследования показывают, что для эжектора VEDL-05H-T1 при питающем давлении 4,5 бара (величина, рекомендуемая фирмой изготовителем как оптимальная при эксплуатации эжектора VEDL-05H-T1), остаточное давление в линии вакуума составляет 142,6 мбар, что соответствует глубине вакуума 85,9 %.

Экспериментально установлено, что для эжектора VEDL-07H-T1 минимальное остаточное давление в линии вакуума достигает величины 207 мбар (79,57 %) при питающем давлении 3,4 бара. Данные, представленные фирмой изготовителем по эжектору VEDL-07H-T1, указывают на оптимальное питающее давление 4,5 бар, при этом остаточное давление в линии вакуума должно достигнуто 150 мбар. Это значение соответствует приведенной в каталоге фирмы изготовителя диаграмме зависимости изменения глубины вакуума от величины питающего давления для эжекторов семейства VEDL. Проведенные исследования показывают, что для эжектора VEDL-07H-T1 при питающем давлении 4,5 бара (величина, рекомендуемая фирмой изготовителем как оптимальная при эксплуатации эжектора VEDL-07H-T1) остаточное давление в линии вакуума составляет 256 мбар, что соответствует глубине вакуума 74,73 %.

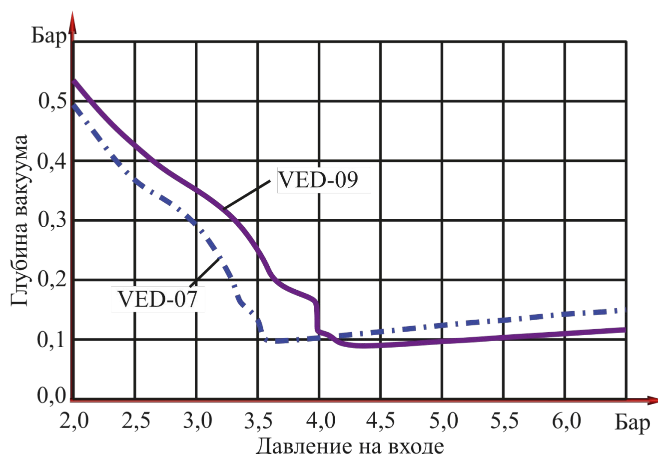


Рис. 6. Диаграммы зависимости изменения глубины вакуума от величины питающего давления для эжекторов серии VED

Анализ экспериментальных данных показывает, что для эжектора VED-07 минимальное остаточное давление в линии вакуума достигает величины 98 мбар (90 %) при питающем давлении 3,63 бара. Данные, приведенные фирмой изготовителем по эжектору VED-07, указывают на оптимальное питающее давление 5 бар, при этом должен быть достигнут вакуум глубиной 90 % (остаточное давление 101 мбар). Это значение не соответствует приведенной в каталоге фирмой изготовителем диаграмме зависимости изменения глубины вакуума от величины питающего давления для эжекторов семейства VED. Проведенные исследования показывают, что для эжектора VED-07 при питающем давлении 5 бар (величина, рекомендуемая фирмой изготовителем как оптимальная при эксплуатации эжектора VED-07), остаточное давление в линии вакуума составляет 124 мбар, что соответствует глубине вакуума 87,76 %.

Экспериментально установлено, что для эжектора VED-09 минимальное остаточное давление в линии вакуума достигает величины 90 мбар (91,12 %) при питающем давлении 4,34 бара. Данные, приведенные фирмой изготовителем по эжектору VED-09, указывают на оптимальное питающее давление 5 бар, при этом должен быть достигнут вакуум глубиной 89 % (остаточное давление 111,5 мбар). Это значение не соответствует приведенной в каталоге фирмы изготовителя диаграмме зависимости изменения глубины вакуума от величины питающего давления для эжекторов семейства VED. Проведенные исследования показывают, что для эжектора VED-09 при питающем давлении 5 бар (величина, рекомендуемая фирмой изготовителем как оптимальная при эксплуатации эжектора VED-09) остаточное давление в линии вакуума составляет 98 мбар, что соответствует глубине вакуума 90,33 %.

Представляет интерес резкое падение значения глубины вакуума и возникновение колебаний показаний глубины вакуума в интервале значений питающего давление от 3,95 до 4,4 бара (рис. 6).

Обсуждение и заключение. Момент появления колебаний, зафиксированный в ходе всех экспериментов, сопровождался заметными изменениями звука выхлопа. Считаем, что такой характер поведения может быть связан с резким изменением характера течения воздуха, что может указывать на наличие производственного дефекта в данном эжекторе. Для подтверждения этого вывода необходимо провести дополнительные эксперименты с другими эжекторами из данной серии. Дополнительно стоит рассмотреть возможность исследования поверхности канала эжектора с целью оценки точности геометрических форм и качества обработки поверхности.

Согласно результатам проведенных экспериментальных исследований вакуумных эжекторов, можно сделать вывод о том, что фактические значения глубины вакуума варьируются в зависимости от величины входного питающего давления и отличаются от значений, представленных производителем. Кроме того, характер графиков также имеет свои отличия. Например, поведение графика на рис. 3 указывает на возможное наличие производственного дефекта в канале эжектора. Актуальным в этой связи является построение математической модели эжекторов, позволяющей на уровне модели изучить факторы, обуславливающие столь специфическое поведение графика. Понимание этих факторов поможет выработать рекомендации по улучшению технологических процессов производства вакуумных эжекторов.

В связи с этим необходимо вводить корректировку величины входного питающего давления для достижения максимальной глубины вакуума для каждого типа эжектора, что будет влиять на производительность как самих эжекторов, так и автоматизированных вакуумных систем.

Полученные результаты исследований могут быть полезны для всех производителей эжекторов с целью корректировки их базовых каталогов и соответствующих рекомендаций по применению этих изделий. В дальнейшем авторы планируют продолжить серию экспериментов, направленных на определение времени создания вакуума в одном литре объема при различных заданных глубинах вакуума.

Список литературы / References

1. Li Macia, Castilla R, Gamez-Montero PJ, Camacho S, Codina E. Numerical Simulation of a Supersonic Ejector for Vacuum Generation with Explicit and Implicit Solver in Openfoam. *Energies.* 2019;12(18):3553. https://doi.org/10.3390/en12183553

2. Besagni G, Mereu R, Inzoli F. Ejector Refrigeration: A Comprehensive Review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 2016;53:373–407. https://doi.org/10.1016/j.rser.2015.08.059

3. Arun Kumar R, Rajesh G. Physics of Vacuum Generation in Zero-Secondary Flow Ejectors. *Physics of Fluids.* 2018;30(6):066102. https://doi.org/10.1063/1.5030073

4. Jafarian A, Azizi M, Forghani P. Experimental and Numerical Investigation of Transient Phenomena in Vacuum Ejectors. *Energy.* 2016;102:528–536. https://doi.org/10.1016/j.energy.2016.02.101

5. Levchenko D, Meleychuk S, Arseniev V. Regime Characteristics of Vacuum Unit with a Vortex Ejector Stage with Different Geometry of Its Flow Path. *Procedia Engineering.* 2012;39:28–34. https://doi.org/10.1016/j.proeng.2012.07.004

6. Kumar V, Sachdeva G. 1-D Model for Finding Geometry of a Single Phase Ejector. *Energy.* 2018;165(A):75–92. https://doi.org/10.1016/j.energy.2018.09.071

7. Sobolev AV. Intensification of Mixing by Small-Size Jets in Ejectors with Central Nozzle. *Thermophysics and Aeromechanics*. 2013;20(3):273–276. URL: https://link.springer.com/article/10.1134/S0869864313030025 (accessed: 10.11.2024).

8. Karthick SK, Srisha MV Rao, Jagadeesh G, Reddy KPJ. Parametric Experimental Studies on Mixing Characteristics within a Low Area Ratio Rectangular Supersonic Gaseous Ejector. *Physics of Fluids.* 2016;28(7):076101. https://doi.org/10.1063/1.4954669

9. Гессе С. *Сжатый воздух как носитель энергии.* Москва: Фесто; 2004. 128 с.

Hesse S. *Compressed Air as an Energy Carrier*. Moscow: Festo; 2004. 128 p. (In Russ.)

10. Goodman N, Leege BJ, Johnson PE. An Improved de Laval Nozzle Experiment. *International Journal of Mechanical Engineering Education.* 2021;50(2):513–537. https://doi.org/10.1177/03064190211034165

11. Moukalled F, Mangani L, Darwish M. *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics.* Springer: Cham; 2016. 791 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-16874-6

12. Jia Yan, Shengyu Li, Zhan Liu. Numerical Investigation on Optimization of Ejector Primary Nozzle Geometries with Fixed/Varied Nozzle Exit Position. *Applied Thermal Engineering.* 2020;175:115426. https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2020.115426

13. Kun Zhang, Shengqiang Shen S., Yong Yang, Xingwang Tian. Experimental Investigation of Adjustable Ejector Performance. *Journal of Energy Engineering.* 2011;138(3):125–129. https://doi.org/10.1061/(ASCE)EY.1943-7897.0000058

14. Савчук С.И. Исследование параметров вакуумных эжекторов, применяемых при сборке и ремонте автомобилей. *Ученые записки Крымского инженерно-педагогического университета.* 2016;53(3):58–64. URL: https://uz.kipu-rc.ru:9443/sn/53.pdf (дата обращения: 28.11.2024).

Savchuk SI. Study of parameters of Vacuum Ejectors Used in the Assembly and Repair of Cars. *Scientific Notes of the Crimean Engineering and Pedagogical University.* 2016;53(3):58–64. URL: https://uz.kipu-rc.ru:9443/sn/53.pdf (accessed: 28.11.2024).

15. Савчук С.И., Э.Д. Умеров, Абдулгазис У.А. Стенд для оценки глубины вакуума, подводимого к специализированным присоскам, используемым в технологических процессах сервиса при эксплуатации и производстве автомобилей. *Ученые записки Крымского инженерно-педагогического университета.* 2023;82(4):225–230.

Savchuk SI, Umerov ED, Abdulgazis UA. A Stand for Assessing the Depth of Vacuum Supplied to Specialized Suction Cups Used in Technological Processes of Service during Operation and Production of Cars. *Scientific Notes of the Crimean Engineering and Pedagogical University.* 2023;82(4):225–230.

Об авторах:

Сергей Игоревич Савчук, кандидат технических наук, доцент кафедры автомобильного транспорта Крымского инженерно-педагогического университета имени Февзи Якубова (295015, Республика Крым, г. Симферополь, пер. Учебный, 8), ORCID, ofelos@outlook.com

Эрвин Джеватович Умеров, кандидат технических наук, доцент кафедры автомобильного транспорта Крымского инженерно-педагогического университета имени Февзи Якубова (295015, Республика Крым, г. Симферополь, пер. Учебный, 8), SPIN-код, ORCID, ScopusID, ResearcherID, Ervin777@yandex.ru

Азиз Умерович Абдулгазис, кандидат технических наук, доцент кафедры автомобильного транспорта Крымского инженерно-педагогического университета имени Февзи Якубова (295015, Республика Крым, г. Симферополь, пер. Учебный, 8), SPIN-код, ORCID, abdulgazis.aziz@mail.ru

Заявленный вклад авторов:
С.И. Савчук: проведение исследования.
Э.Д. Умеров: написание рукописи — рецензирование и редактирование.
А.У. Абдулгазис: визуализация.

Конфликт интересов: **авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Sergey I. Savchuk, Cand.Sci. (Eng.), Associate Professor of the Motor Transport Department, Crimean Engineering and Pedagogical University named after Fevzi Yakubov (8, Uchebnyi Lane, Simferopol, 295015, Republic of Crimea), ORCID, ofelos@outlook.com

Ervin D. Umerov, Cand.Sci. (Eng.), Associate Professor of the Motor Transport Department, Crimean Engineering and Pedagogical University named after Fevzi Yakubov (8, Uchebnyi Lane, Simferopol, 295015, Republic of Crimea), SPIN-code, ORCID, ScopusID, ResearcherID, Ervin777@yandex.ru

Aziz U. Abdulgazis, Cand.Sci. (Eng.), Associate Professor of the Motor Transport Department, Crimean Engineering and Pedagogical University named after Fevzi Yakubov (8, Uchebnyi Lane, Simferopol, 295015, Republic of Crimea), SPIN-code, ORCID, abdulgazis.aziz@mail.ru

Claimed Contributorship:
SI Savchuk: conducting the research.
ED Umerov: manuscript writing — reviewing and editing.
AU Abdulgazis: visualization.

Conflict of Interest Statement: **the authors do not have any conflict of interest.**

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 15.12.2024
Поступила после рецензирования / Reviewed 10.01.2025
Принята к публикации / Accepted 17.01.2025

МАШИНОСТРОЕНИЕ И МАШИНОВЕДЕНИЕ
MACHINE BUILDING AND MACHINE SCIENCE





УДК 62.621
https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-52-64

Оригинальное эмпирическое исследование

Использование суррогатных моделей при построении множества Парето позиционного электропневматического привода с дискретными пневмораспределителями



EDN: OETHVA

М.О. Шейкин ✉, С.Н. Черкасских, Д.В. Шилин, В.В. Феденков
Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва, Российская Федерация
✉ sheykinmo@mpei.ru

Аннотация

Введение. Пневматические приводы находят широкое применение в промышленности благодаря своей надежности, простоте конструкции и способности функционировать в сложных условиях. Однако при решении задач позиционирования использование традиционных пропорциональных распределителей зачастую оказывается избыточным, что ведет к неоправданному увеличению стоимости и усложнению конструкции. Применение более простых дискретных распределителей сталкивается с проблемой, связанной с необходимостью достижения компромисса между частотой их переключения и точностью позиционирования.

Существующие исследования, в основном, фокусируются на оптимизации отдельных показателей качества работы пневмоприводов и не предлагают эффективных методов поиска компромисса между конфликтующими критериями. Использование классических методов построения множества Парето для многокритериальной оптимизации требует значительных вычислительных ресурсов, что затрудняет их практическое применение.

Целью исследования является разработка методологии многокритериальной оптимизации параметров позиционного электропневматического привода с дискретными распределителями на основе построения множества Парето с использованием суррогатных моделей, позволяющей найти оптимальный баланс между частотой переключений и точностью позиционирования.

Материалы и методы. Исследование проводилось на модели позиционного пневмопривода с дискретными распределителями, реализованной в MATLAB Simulink. Для анализа параметров использовался метод латинского гиперкуба, который обеспечивает равномерное заполнение пространства параметров. Для снижения вычислительных затрат были применены суррогатные модели, построенные с использованием нейронных сетей. В качестве алгоритма управления было выбрано скользящее управление, которое эффективно компенсирует внешние возмущения и неопределенности системы.

Результаты исследования. Оптимизация параметров управления показала возможность достижения высокой точности позиционирования при минимальной частоте переключений распределителей. Использование метода латинского гиперкуба обеспечило равномерное распределение расчетных точек, что позволило построить точную суррогатную модель. Экспериментально было доказано, что предложенный подход снижает вычислительные затраты на 48 %, сохраняя высокую точность моделирования и анализа.

Обсуждение и заключение. Результаты исследования подтверждают, что скользящее управление является эффективным решением для дискретных пневмоприводов в контексте многокритериальной оптимизации. Разработанный подход позволяет значительно уменьшить частоту переключений распределителей без ощутимых потерь в качестве переходных процессов, что способствует продлению сроков службы оборудования и повышению надежности автоматизированных систем. Использование суррогатных моделей и нейросетевых технологий открывает новые перспективы для более быстрого проектирования сложных систем.

Ключевые слова: пневмопривод, дискретные распределители, скользящее управление, многокритериальная оптимизация, суррогатные модели

Для цитирования. Шейкин М.О., Черкасских С.Н., Шилин Д.В., Феденков В.В. Использование суррогатных моделей при построении множества Парето позиционного электропневматического привода с дискретными пневмораспределителями. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2025;25(1):52–64. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-52-64

Original Empirical Research

Using Surrogate Models in the Construction of a Pareto-Optimal Positioning Electropneumatic Actuator with Discrete Pneumatic Valves

Maxim O. Sheykin ✉, **Sergey N. Cherkasskikh**, **Denis V. Shilin**, **Vladimir V. Fedenkov**
National Research University MPEI, Moscow, Russian Federation
✉ sheykinmo@mpei.ru

Abstract
Introduction. Pneumatic actuators are widely used in industry due to their reliability, simplicity of design, and ability to operate under complex conditions. However, when solving positioning problems, the use of traditional proportional valves is often redundant, which causes an unjustified increase in cost and complexity of the design. The application of simpler discrete distributors faces the problem related to the need to reach a compromise between their switching frequency and positioning accuracy.
Existing studies mainly focus on optimizing individual performance indicators of pneumatic actuators and do not offer effective methods for finding a compromise between conflicting criteria. Using classical methods for constructing a Pareto set for multicriteria optimization requires significant computational resources, which complicates their practical application.
The research objective is to develop a methodology for multicriteria optimization of the parameters of a positioning electropneumatic actuator with discrete distributors based on the construction of a Pareto set using surrogate models, which provides finding the optimal balance between switching frequency and positioning accuracy.
Materials and Methods. The research was conducted on a model of a positioning pneumatic actuator with discrete distributors, implemented in MATLAB Simulink. The Latin hypercube method was used to analyze the parameters, which provided uniform filling of the parameter space. To reduce computational costs, surrogate models, built using neural networks, were used. Sliding control was selected as a control algorithm, which effectively compensated for external disturbances and uncertainties of the system.
Results. The optimization of control parameters has shown the possibility of reaching high positioning accuracy with a minimum frequency of distributor switching. The use of the Latin hypercube method provided a uniform distribution of the calculation points, which made it possible to construct an accurate surrogate model. It has been experimentally proven that the proposed approach reduces computational costs by 48%, while maintaining high accuracy of modeling and analysis.
Discussion and Conclusion. The research results confirm that sliding control is an effective solution for discrete pneumatic drives in the context of multicriteria optimization. The developed approach makes it possible to significantly reduce the frequency of switching distributors without substantial losses in the quality of transients, which helps to extend the service life of equipment and increase the reliability of automated systems. The use of surrogate models and neural network technology opens up new prospects for faster design of complex systems.

Keywords: pneumatic actuator, discrete pneumatic valves, sliding control, multicriteria optimization, surrogate models

For Citation. Sheykin MO, Cherkasskikh SN, Shilin DV, Fedenkov VV. Using Surrogate Models in the Construction of a Pareto-Optimal Positioning Electropneumatic Actuator with Discrete Pneumatic Valves. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2025;25(1):52–64. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-52-64

Введение. Пневматические приводы находят широкое применение в различных областях промышленности благодаря простоте их конструкции, возможности обеспечения высоких скоростей движения объектов управления, экологичности, пожаробезопасности, возможности работы в агрессивных средах.

В системах, ориентированных на слежение, для управления пневмоприводом обычно используются пропорциональные распределители, которые обеспечивают непрерывное регулирование. Однако, когда основной задачей пневмопривода является позиционирование выходного звена в заданном положении, а не следование заданной траектории, применение таких распределителей может оказаться излишним. В данной ситуации целесообразно рассмотреть использование более простых дискретных распределителей [1].

Существующие исследования предлагают разнообразные подходы к управлению позиционированием, включая алгоритмы с использованием широтно-импульсной модуляции, а также принципы скользящего и прогнозного управления [2]. Повышение точности позиционирования достигается либо модификацией алгоритма управления вблизи точки останова [3], либо посредством внедрения специализированных механических или гидравлических

тормозных устройств [4]. Тем не менее, несмотря на улучшение точности, использование тормозных устройств значительно усложняет конструкцию, что в свою очередь может свести на нет преимущества применения дискретных пневмораспределителей [5].

Анализ современного состояния исследований выявил существенные пробелы в текущем понимании проблемы. В первую очередь, отсутствует целостный подход к оценке эффективности различных структур позиционных электропневматических приводов с дискретными клапанами. Кроме того, недостаточно проработан вопрос достижения компромисса между частотой переключений распределителей и качеством позиционирования. Существующие методики многокритериальной оптимизации параметров таких систем не обеспечивают необходимой эффективности. Авторы публикаций часто сосредотачиваются на отдельных аспектах качества, таких как точность или быстродействие. Слабое внимание уделяется взаимосвязи между повышением точности позиционирования и увеличением частоты переключений распределителей, что напрямую сказывается на износе оборудования и его сроке службы.

В пенвмоприводе, рассматриваемом в данной работе, не предусмотрены специальные тормозные устройства, и позиционирование выходного звена в заданной точке осуществляется исключительно за счет переключения дискретных пневмораспределителей в нужные моменты времени, согласно применяемым алгоритмам управления. Это обеспечивает простоту конструкции и низкую стоимость решения, однако приводит к частому переключению пневмораспределителей. Строгость требований к качеству переходного процесса, в свою очередь, неизбежно ведет к росту числа переключений.

Таким образом, возникает необходимость в поиске компромиссного решения, принимающего во внимание два противоречивых критерия: точность позиционирования и интенсивность работы распределителей. Построение фронта Парето позволит определить множество неулучшаемых решений, где невозможно повысить один показатель качества без ухудшения другого, что предоставит разработчику возможность оправданного выбора параметров системы. Однако традиционные методы построения множества Парето требуют многократных расчетов сложных динамических моделей [6], что делает процесс крайне трудоемким и затратным по времени.

Применение суррогатных моделей при построении множества Парето [7] открывает новые горизонты для решения данной проблемы, хотя и требует разработки специализированных методик, адаптированных для конкретного класса пневматических устройств.

Целью данной работы является разработка методики многокритериальной оптимизации параметров позиционного электропневматического привода с дискретными клапанами, основанной на использовании суррогатных моделей, которая обеспечит эффективный поиск компромиссных решений между частотой переключений и качеством позиционирования. Для достижения этой цели необходимо разработать методику создания суррогатной модели для оценки показателей качества позиционного электропневматического привода. Также потребуется создать алгоритм многокритериальной оптимизации параметров привода с использованием суррогатной модели и провести исследование эффективности предложенного подхода на конкретной конструкции привода.

Материалы и методы. В рамках данной работы рассматривается позиционный пневмопривод с дискретными пневмораспределителями без специальных тормозных устройств, изображенный на рис. 1. Он содержит одноштоковый пневмоцилиндр двухстороннего действия, управляемый четырьмя пневмораспределителями 2/2. Использование четырех пневмораспределителей 2/2 вместо двух пневмо-распределителей 3/2 позволяет обеспечить лучшие динамические характеристики пневмопривода при допустимом удорожании конструкции.

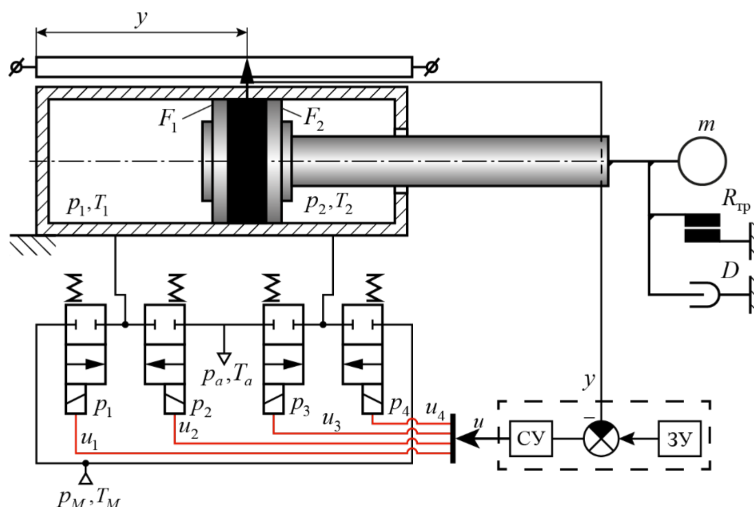


Рис. 1. Схема пневмопривода с дискретными распределителями

Для управления дискретными пневмораспределителями используется система управления (СУ), представленная на рис. 2. Она реализует принцип скользящего управления в соответствии с входным сигналом, определяемым задающим устройством (ЗУ). Скользящий режим обеспечивает робастное управление, позволяющее системе эффективно справляться с неопределенностями и возмущениями, характерными для пневматических систем.

Основная идея метода заключается в том, чтобы заставить систему двигаться по заранее определенной траектории, называемой «поверхностью скольжения» [8]. Когда система попадает на эту траекторию, она начинает «скользить» по ней к нужной цели, игнорируя многие внешние воздействия.

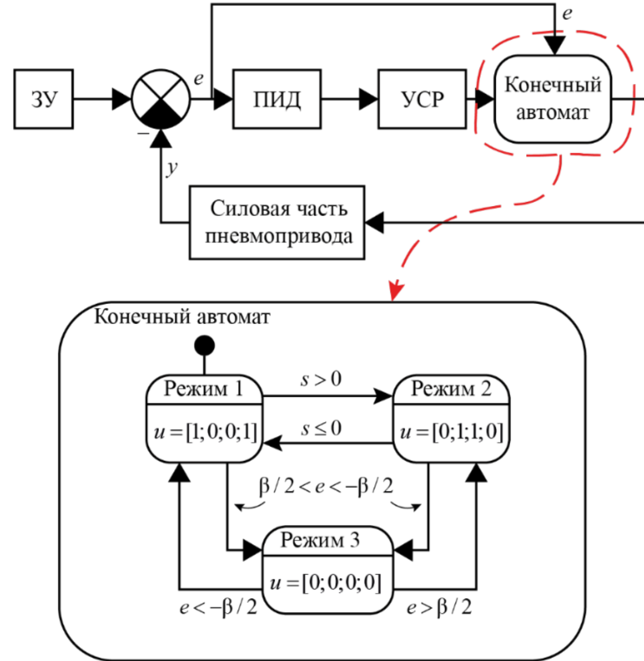


Рис. 2. Структура системы управления

В данной работе используется прямая скольжения, описываемая уравнением:

$$s = C_1 e + C_2 \dot{e}\,,$$

где s — функция переключения; e — ошибка регулирования; $\dot{e}$ — скорость изменения ошибки; C_1 и C_2 — положительные коэффициенты, определяющие наклон и характеристики прямой скольжения.

Управление состоит из двух частей: одна часть удерживает систему на нужной траектории, а другая — быстро возвращает ее обратно, если что-то пытается сбить систему с пути [9]. Эта вторая часть может вызывать быстрые нежелательные колебания.

Управляющий сигнал от регулятора скользящего режима подается на вход конечного автомата, формирующего соответствующие комбинации управляющих воздействий для пневмораспределителей. Система реализует три основных режима работы: выдвижение поршня (активны Р1 и Р4), втягивание поршня (активны Р2 и Р3) и торможение (активны Р1 и Р2). Режим торможения, при котором давление питания подается в обе полости пневмоцилиндра, включается при достижении ошибки регулирования значений из диапазона [–β/2; +β/2], где β — ширина коридора торможения.

Математическая модель силовой пневматической части включает уравнение динамического баланса сил на поршне пневмоцилиндра, уравнения заполнения и опорожнения полостей пневмоцилиндра и уравнения массовых расходов для нагнетательной и выхлопной полостей [10].

$$p_1 \cdot F_1 - p_2 \cdot F_2 = m\frac{d^2 y}{dt^2} + D \cdot y\frac{dy}{dt} + R_{\text{тр}} \cdot sign\left(\frac{dy}{dt}\right) + R_{\text{уп}},$$

где p_1, p_2 — давления в поршневой и штоковой полостях пневмоцилиндра; F_1, F_2 — поршневая и штоковая площади поршня; m — приведенная масса; $R_{\text{тр}}$ — сила кулоновского трения; D — коэффициент вязкого трения; $R_{\text{уп}}$ — сила реакции упоров в пневмоцилиндре; y — перемещение поршня.

Реакция упоров, ограничивающих перемещение поршня, может быть рассчитана по следующим формулам:

Для случая, когда поршень приближается к нижнему упору (при $y < -0{,}5H$):

$$R_{\text{уп}} = C_{\text{уп}} \cdot (y + 0{,}5H) + \beta_{\text{уп}} \dot{y}.$$

Для случая, когда поршень находится в пределах рабочего хода (при $-0{,}5H \le y \le 0{,}5H$):

$$R_{\text{уп}} = 0.$$

Для случая, когда поршень приближается к верхнему упору (при $y > 0{,}5H$):

$$R_{\text{уп}} = C_{\text{уп}} \cdot (y - 0{,}5H) + \beta_{\text{уп}} \dot{y},$$

где H — ход поршня пневмоцилиндра; $C_{\text{уп}}$, $\beta_{\text{уп}}$ — коэффициенты жесткости и диссипации контактного взаимодействия поршня пневмоцилиндра с упором соответственно.

Уравнение заполнения и опорожнения левой полости имеет вид [11]:

$$kR\left(T_{\text{М}} G_1 - T_1 G_2\right) = kp_1 F_1 \dot{y} + F_1\left(y_{10} + y\right)\dot{p}_1, \tag{1}$$

где k — показатель адиабаты; R — удельная газовая постоянная; $T_{\text{м}}$, T_1 — температуры воздуха в магистрали и в левой полости пневмоцилиндра; G_1, G_2 — массовые расходы воздуха через пневмораспределитель Р1 и Р2 соответственно. Величина учитывает выбор начала координат y, а также мертвый объем левой части пневмоцилиндра, включая объем подводящей линии и определяется по выражению:

$$y_{10} = \frac{V_{10}}{F_1} + 0{,}5H.$$

Массовые расходы G_1 и G_2 для адиабатического процесса рассчитываются по уравнению Сен-Венана – Ванцеля [12]:

$$G_1 = \mu f_1 p_{\text{м}} \sqrt{\frac{2k}{(k-1)T_{\text{м}}}} \varphi\left(p_{\text{м}}, p_1\right); \tag{2}$$

$$G_2 = \mu f_2 p_1 \sqrt{\frac{2k}{(k-1)T_1}} \varphi\left(p_1, p_{\text{а}}\right), \tag{3}$$

где $p_{\text{м}}$, $p_{\text{а}}$ — давления магистрали и атмосферы; μ — коэффициент расхода, f_1, f_2 — площади дроссельных щелей пневмораспределителей Р1 и Р2 соответственно.

Расходная функция $\varphi(p_a, p_b)$ для двухатомного идеального газа определяется следующим образом

При докритическом режиме истечения (когда $p_a / p_b > 0{,}528$):

$$\varphi(p_a, p_b) = \sqrt{\left(\frac{p_b}{p_a}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_b}{p_a}\right)^{\frac{k+1}{k}}}.$$

При критическом и сверхкритическом режиме истечения (когда $p_a / p_b \le 0{,}528$):

$$\varphi(p_a, p_b) = 0{,}259,$$

где k — показатель адиабаты (для двухатомного газа обычно $k = 1{,}4$).

Температура T_1 при адиабатическом процессе опорожнения равна:

$$T_1 = T_{\text{а}} \left(\frac{p_1}{p_a}\right)^{\frac{k-1}{k}}. \tag{4}$$

Подставив (1), (2) и (3) в (4) получим:

$$F_1\left(y_{10} + y\right)\dot{p}_1 = g\left(f_1, f_2, p_1\right) - k\, p_1 F_1 \dot{y},$$

где

$$g\left(f_a, f_b, p\right) = \mu f_a p_{\textit{м}} \sqrt{\frac{2k^3 RT_{\textit{м}}}{(k-1)}} \cdot \varphi\left(p_{\textit{м}}, p\right) - k\mu f_b p^{\frac{3k-1}{2k}} p_a^{\frac{1-k}{2k}} \sqrt{\frac{2k}{k-1} RT_a}\, \varphi\left(p, p_a\right).$$

Процессы заполнения и опорожнения правой полости описываются следующим уравнением:

$$kR\left(T_{\textit{м}} G_4 - T_2 G_3\right) = -kp_2 F_2 \dot{y} + F_2\left(y_{20} - y\right)\dot{p}_2, \tag{5}$$

где T_2 — температура воздуха в правой полости пневмопривода; G_3, G_4 — массовые расходы воздуха через пневмораспределитель Р3 и Р4 соответственно. Величина y_2 определяется по формуле:

$$y_{20} = \frac{V_{20}}{F_2} + 0{,}5H.$$

В выражении V_{20} — мертвый объем правой полости гидроцилиндра, включая объем выхлопной линии. Температура T_2 при адиабатическом процессе опорожнения равна:

$$T_2 = T_{\text{а}} \left(\frac{p_2}{p_a}\right)^{\frac{k-1}{k}}. \tag{6}$$

Массовые расходы G_3 и G_4 равны:

$$G_1 = \mu f_1 p_{\text{м}} \sqrt{\frac{2k}{(k-1)T_{\text{м}}}} \varphi\left(p_{\text{м}}, p_1\right); \tag{7}$$

$$G_2 = \mu f_2 p_1 \sqrt{\frac{2k}{(k-1)T_1}} \varphi\left(p_1, p_{\text{а}}\right), \tag{8}$$

где f_3, f_4 — площади дроссельных щелей пневмораспределителей Р3 и Р4 соответственно.

Подставив (6), (7) и (8) в (5) получим:

$$F_2\left(y_{20} - y\right)\dot{p}_2 = g\left(f_4, f_3, p_2\right) + kp_2F_2\dot{y}.$$

Представленная математическая модель пневмопривода впоследствии была реализована в программном пакете Matlab Simulink (рис. 3). Численное моделирование системы производилось на основе параметров, значения которых представлены в таблице 1.

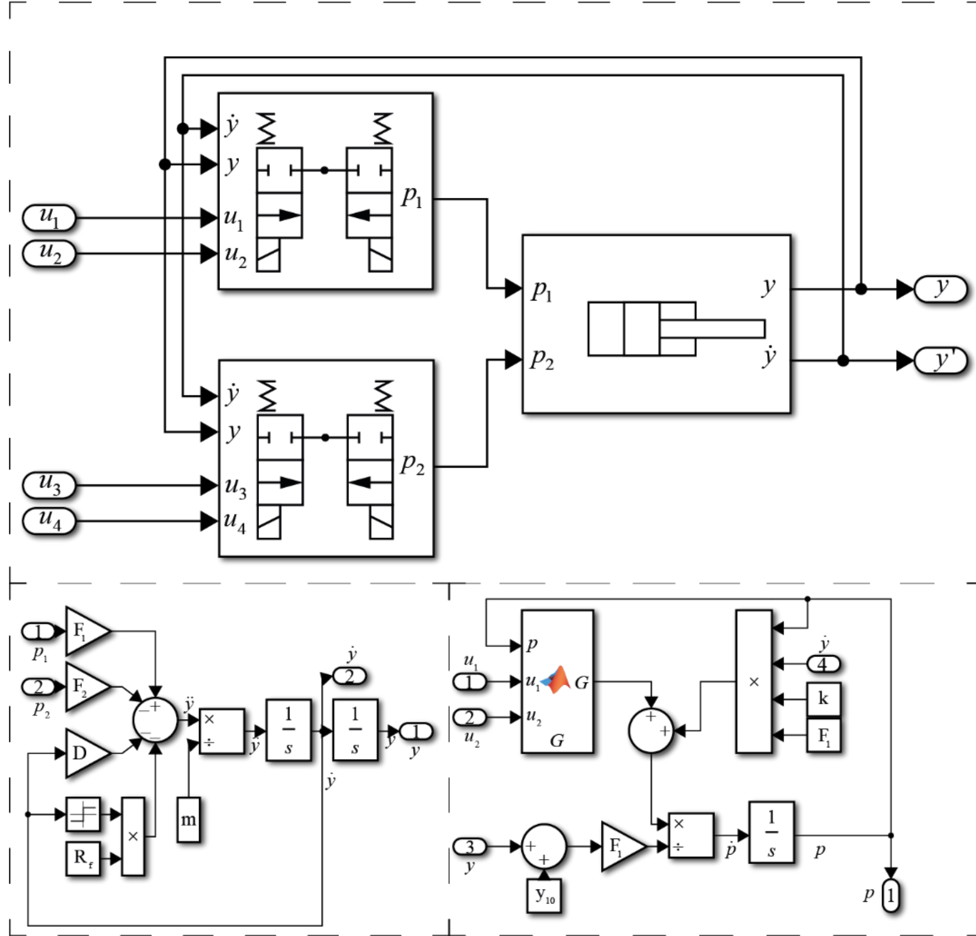


Рис. 3. Модель пневмопривода с дискретными пневмораспределителями в Matlab Simulink

Таблица 1

Значения параметров модели для численного моделирования

Параметр	Значение
Приведенная масса на конце штока, кг	6
Давление магистрали, бар	4
Давления выхлопа, бар	1
Диаметр поршня пневмоцилиндра, мм	32
Диаметр штока пневмоцилиндра, мм	12
Температура рабочей среды, K	293,15
Сила трения страгивания, Н	20
Сила трения скольжения, Н	15
Коэффициент вязкого трения, мм/с	350

Предлагаемая методика построения множества Парето для рассматриваемой структуры пневмопривода представлена в виде алгоритма на рис. 4 и включает несколько этапов.



Рис. 4. Алгоритм построения множества Парето

Выбор базовых параметров показателей качества.

Определение ограничений на базовые параметры и показатели качества.

Формирование моделей и алгоритмов, позволяющих определять выбранные показатели качества для заданного сочетания базовых параметров.

Численное моделирование (многократное численное моделирование для создания набора рассчитанных данных).

Создание и обучение нейросетевой суррогатной модели.

Построение множества Парето (использование суррогатной модели для построения фронта Парето).

На предварительном этапе выбираются показатели качества, оценивающие совершенство исследуемой системы. Для комплексной оценки качества переходного процесса может быть использована обобщенная интегральная квадратичная оценка [1]:

$$J_{21} = \int_0^\infty \left[e^2(t) + \tau \dot{e}(t) \right] dt,$$

где e — переходная составляющая ошибки, нормированная от 0 до 1; τ — весовой коэффициент.

Улучшение качества переходного процесса связано с увеличением числа переключений пневмораспределителей n. В этой связи представляет интерес исследование предельных возможностей рассматриваемой структуры пневмопривода по двум конфликтующим показателям качества J_{21} и n. На предварительном этапе выбираются показатели качества, которые оценивают эффективность исследуемой системы. Таким образом, формируется пространство показателей качества, в котором будет выделена поверхность, соответствующая фронту Парето.

Из конструктивных параметров системы выделена группа базовых параметров, определяющих основные характеристики управления: коэффициенты наклона прямой скольжения C_1 и C_2, время срабатывания распределителей и ширина коридора торможения. Диапазоны варьирования этих параметров определяют пространство поиска оптимальных решений и представлены в таблице 2.

Таблица 2

Интервалы значений варьируемых параметров

Коэффициент C_1	1,0–4,0
Коэффициент C_2	0,1–1,0
Время срабатывания распределителя, мс	5–45
Величина коридора торможения, мм	2–4

Для расчета вектора показателей качества по вектору базовых параметров формируются соответствующие модели. Для рассматриваемого случая использовалась нелинейная динамическая модель, включающая в себя как силовую пневматическую часть, так и систему управления на базе скользящих режимов.

На следующем этапе пространство параметров заполняется расчетными точками, в которых будет вычисляться вектор показателей качества. При этом количество точек должно быть минимальным для сокращения вычислительных затрат, но достаточным для обеспечения необходимой точности суррогатной модели. Важным требованием является также равномерность распределения точек в пространстве параметров.

Для построения суррогатной модели были исследованы различные методы заполнения пространства параметров: случайная выборка, метод латинского гиперкуба (ЛГК), метод Соболя и сеточный метод. На рис. 5 представлено сравнение заполнения двумерного пространства равномерным методом прямого перебора и методом ЛГК. Несмотря на кажущуюся визуальную равномерность, прямой перебор обеспечивает худшее качество заполнения по сравнению с методом ЛГК.

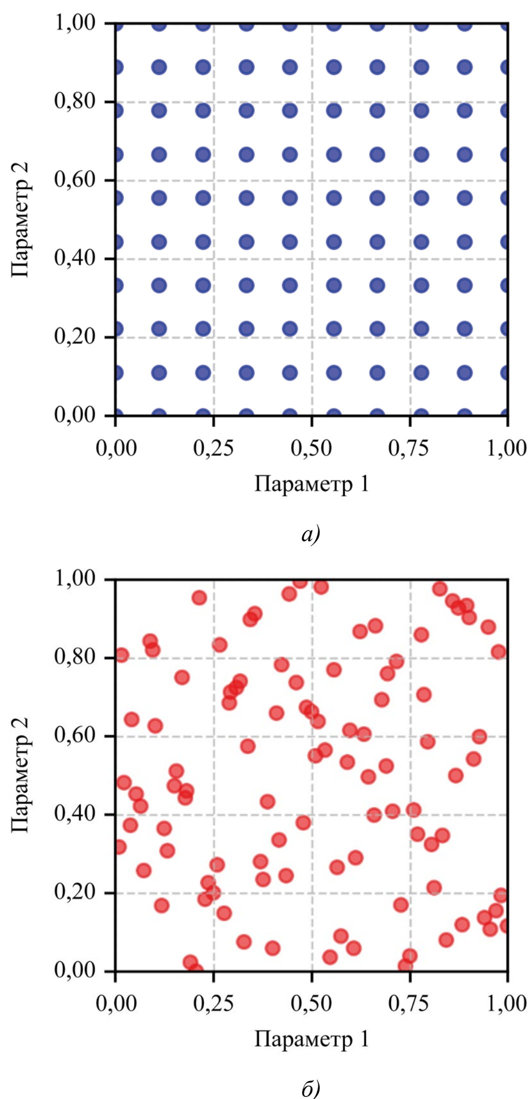


Рис. 5. Заполнение пространства параметров расчетными точками:
а — равномерное заполнение; *б* — заполнение методом ЛГК

Для количественной оценки равномерности покрытия пространства параметров был разработан метрический метод [2], основанный на сравнении удельного среднего расстояния между соседними точками. Метод включает нормализацию параметров в единичном гиперкубе, генерацию точек исследуемым методом заполнения и расчет коэффициента Монте-Карло. Этот коэффициент представляет собой отношение фактического среднего расстояния между соседними точками к ожидаемому среднему расстоянию:

$$I = \frac{0,5}{\sqrt{\frac{n}{A}}},$$

где n — количество реальных точек; A — площадь области (в рассматриваемом случае A = 1).

Для выбранных сочетаний параметров были проведены параллельные расчеты модели и вычисления показателей качества, что позволило сформировать набор данных для построения суррогатной модели. В работе использована нейронная сеть прямого распространения следующей архитектуры [3, 13]: входной слой (3 входа с нормализацией данных), два полносвязных слоя (16 и 8 нейронов) с функциями активации ReLU, выходной слой для регрессии. Обучение сети проводилось с использованием алгоритма ADAM, обеспечивающего адаптивную настройку скорости обучения и эффективную работу с зашумленными данными.

На заключительном этапе построение границы Парето осуществлялось с помощью эволюционного алгоритма NSGA-II [4, 14], использующего полученные с помощью суррогатной модели оценки показателей качества. Данный алгоритм позволяет эффективно выявлять множество недоминируемых решений в пространстве критериев качества [15].

Результаты исследования. Разработанная методика была апробирована на позиционном пневмоприводе с дискретными распределителями. На первом этапе было проведено исследование динамических характеристик системы управления. На рис. 6 представлены переходные процессы, демонстрирующие основные особенности функционирования привода. Анализ графиков показывает симметрию в количестве переключений управляющего сигнала при прямом и обратном ходе, что свидетельствует о стабильности алгоритма управления. При этом наблюдается асимметрия точности позиционирования: для прямого хода системы ошибка регулирования достигает 1,5 мм, что объясняется конструктивными особенностями одноштокового пневмоцилиндра.

а)

б)

в)

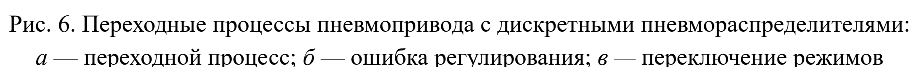


Рис. 6. Переходные процессы пневмопривода с дискретными пневмораспределителями:
а — переходной процесс; *б* — ошибка регулирования; *в* — переключение режимов

Оценка влияния параметров системы на переходные процессы выявила, что уменьшение ширины коридора торможения повышает точность позиционирования, сопровождаясь увеличением числа переключений пневмораспределителей. Аналогичным образом увеличение быстродействия пневмораспределителей повышает точность позиционирования, но приводит к усилению колебательности переходного процесса и увеличению числа переключений. При этом величина перемещения не оказывала значимого влияния на характер переходного процесса, что свидетельствует о линейности системы в широком диапазоне рабочих перемещений и подтверждает эффективность алгоритма управления.

При построении суррогатной модели область параметров была заполнена расчетными точками, при этом предпочтение было отдано методу латинского гиперкуба, который обеспечивает равномерное распределение точек по сравнению с прямым перебором, случайной выборкой, методом Соболя и сетевым методом. Расчёт коэффициента Монте-Карло (таблица 3) продемонстрировал, что метод латинского гиперкуба характеризуется наименьшей дисперсией расстояний между соседними точками, что позволило сформировать выборку из 2 500 комбинаций базовых параметров. Применение замещающих суррогатных моделей снизило трудоёмкость построения множества Парето, что отразилось на уменьшении времени расчёта на 48 %. Суррогатная модель была построена на основе нейросетевых технологий, при этом анализ различных подходов к формированию обучающей выборки данных подтвердил целесообразность использования метода латинского гиперкуба.

Таблица 3

Сравнение равномерности покрытия пространства параметров различными методами выборки

Метод выборки	Коэффициент Монте-Карло
Случайная выборка	1,024
Метод латинского гиперкуба	0,997
Метод Соболя	0,980

Для каждой комбинации базовых параметров был выполнен расчёт математической модели с определением показателей качества, что позволило рассматривать совокупность расчётных точек каждой итерации алгоритма как поколение. В рамках процедуры недоминирующей сортировки выделялись неулучшаемые решения, формирующие фронт Парето нулевого ранга, а оставшиеся точки образовывали фронт Парето первого ранга. Последующая генерация следующего поколения осуществлялась посредством операций, аналогичных скрещиванию, мутациям и отбору, при этом фиксированный размер поколения поддерживался посредством отсечения наименее качественных вариантов. Алгоритм оптимизации завершался при достижении максимального числа поколений или требуемого уровня сходимости. Результатом работы алгоритма, реализованного с использованием эволюционного алгоритма NSGA-II, стала граница Парето, представленная на рис. 7, отражающая неулучшаемые решения с балансом между числом переключений пневмораспределителей и качеством переходного процесса. При этом небольшая крутизна границы позволяет существенно уменьшить количество переключений без значительного ухудшения переходных характеристик.

Использование нейросети с четырьмя скрытыми промежуточными слоями и обучающей выборкой, состоящей из 2500 точек, позволило обеспечить среднюю точность замещающей суррогатной модели равной 91 %, при этом максимальное отклонение составило 12 %. Дополнительное увеличение числа точек на 50 % привело к росту точности замещающей модели на 15 %.

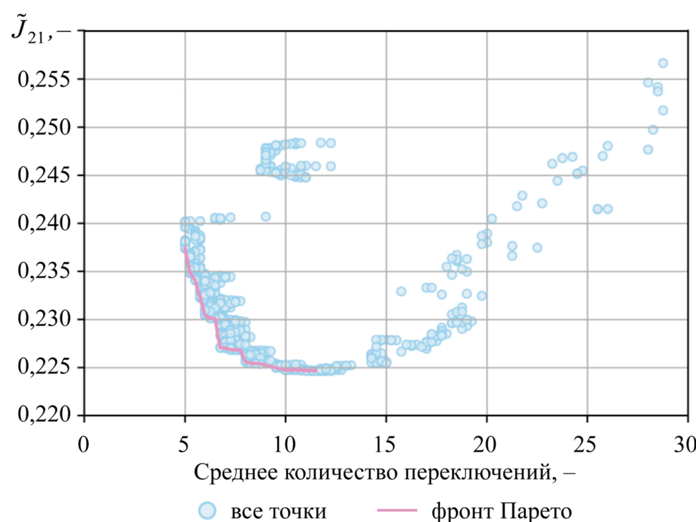


Рис. 7. Множество Парето для пневмопривода с дискретными распределителями

Обсуждение и заключение. Полученные результаты свидетельствуют о высокой стабильности алгоритма управления, обеспечивающего симметричное переключение сигналов при прямом и обратном ходах, что подтверждает корректность применённого подхода к управлению пневмоприводом. Выявленная асимметрия точности позиционирования, выражающаяся в ошибке до 1,5 мм для прямого хода, указывает на необходимость дальнейшей оптимизации конструктивных особенностей пневмоцилиндра.

Анализ влияния параметров системы на динамические характеристики продемонстрировал, что компромисс между точностью позиционирования и числом переключений пневмораспределителей требует оптимального выбора ширины коридора торможения и быстродействия распределителей. Использование метода латинского гиперкуба для формирования обучающей выборки обеспечило равномерное заполнение параметрического пространства, что подтверждено расчётами коэффициента Монте-Карло.

Применение замещающих суррогатных моделей, построенных на основе нейросетевых технологий, позволило снизить трудоёмкость построения множества Парето и сократить время расчёта на 48 %, что свидетельствует о перспективности данного подхода в задачах оптимизации. Эффективность эволюционного алгоритма NSGA-II, используемого для построения границы Парето, подтверждена получением компромиссных решений, обеспечивающих баланс между числом переключений пневмораспределителей и качеством переходного процесса.

Достижение средней точности замещающей модели на уровне 91 % и уменьшение максимального отклонения до 12 % при использовании нейросети с четырьмя скрытыми слоями демонстрируют высокую эффективность нейросетевых технологий, а увеличение точности на 15 % при расширении обучающей выборки на 50 % указывает на потенциал дальнейшего повышения точности моделей.

Таким образом, результаты проведённых исследований подтверждают потенциал предложенной методики для повышения эффективности позиционных пневмоприводов с дискретными распределителями и определяют перспективные направления дальнейших оптимизационных исследований в данной области.

Список литературы / References

1. Youssry M, Elmayyah W, Mabrouk M. Position Control of a Pneumatic Cylinder Actuator Using Modified PWM Algorithm. *Journal of Engineering Science and Military Technologies.* 2020;4(1):121–126. http://doi.org/10.21608/ejmtc.2020.31861.1145

2. Nguyen T, Leavitt J, Jabbari F, Bobrow JE. Accurate Sliding-Mode Control of Pneumatic Systems Using Low-Cost Solenoid Valves. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics.* 2007;12(2):216–219. https://doi.org/10.1109/TMECH.2007.892821

3. Bone GM, Xue M, Flett J. Position Control of Hybrid Pneumatic–Electric Actuators Using Discrete-Valued Model-Predictive Control. *Mechatronics.* 2014;25:1–10. https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2014.10.009

4. Дао Т.А., Сидоренко В.С., Дымочкин Д.Д. Исследование точности позиционирования автоматизированного пневмопривода с внешним тормозным устройством. *Вестник Донского государственного технического университета.* 2015;15(4):46–53. https://doi.org/10.12737/16077

The Anh Dao, Sidorenko VS, Dymochkin DD. Study on Positioning Accuracy of Automated Pneumatic Drive with an Outer Brake. *Vestnik of Don State Technical University*. 2015;15(4):46–53. https://doi.org/10.12737/16077

5. Грищенко В.И., Сидоренко В.С. Моделирование процесса позиционирования исполнительных механизмов технологического оборудования дискретным пневмогидравлическим устройством с пневматическими линиями связи. *Вестник Донского государственного технического университета.* 2009;(S2):81–90.

Grishchenko VI, Sidorenko VS. Modeling of the Positioning Process of Actuators of Technology Equipment with Discrete Pneumohydraulic Device and Pneumatic Communication Lines. *Vestnik of Don State Technical University.* 2009;(S2):81–90.

6. Подиновский В.В., Ногин В.Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач*. Москва: Физматлит; 2007. 256 с.

Podinovskiy VV, Nogin VD. *Pareto-Optimal Solutions to Multicriteria Problems*. Moscow: Fizmatlit; 2007. 256 p. (In Russ.)

7. Diaz-Manriquez A, Toscano G, Barron-Zambrano JH, Tello-Leal E. A Review of Surrogate Assisted Multiobjective Evolutionary Algorithms. *Computational Intelligence and Neuroscience.* 2016;2016:9420460. http://doi.org/10.1155/2016/9420460

8. Yongping Pan, Chenguang Yang, Lin Pan, Haoyong Yu. Integral Sliding Mode Control: Performance, Modification, and Improvement. IEEE *Transactions on Industrial Informatics.* 2018;14(7):3087–3096. https://doi.org/10.1109/TII.2017.2761389

9. Шейкин М.О., Черкасских С.Н. Экспериментальное исследование пневмопривода с регулятором нечеткой логики. В: *Труды XII Всероссийской научно-технической конференции «Гидравлические машины, гидроприводы и гидропневмоавтоматика. Современное состояние и перспективы развития».* Санкт-Петербург: Политех-Пресс; 2022. С. 257–267. https://doi.org/10.18720/SPBPU/2/id22-185

Sheykin MO, Cherkasskikh SN. Experimental Study of a Pneumatic Actuator with a Fuzzy Logic Controller. In: *Proc. XII All-Russian Scientific and Technical Conference "Hydraulic Machines, Hydraulic Drives and Hydropneumatic Automation. Current Status and Development Prospects".* St. Petersburg: Politekh-Press; 2022. P. 257–267.

10. Шейкин М.О., Черкасских С.Н., Шилин Д.В. Применение управления в скользящих режимах в пневмоприводе. *Гидравлика.* 2024;(23):24–32.

Sheykin MO, Cherkasskikh SN, Shilin DV. Application of Sliding Mode Control in Pneumatic Actuators. *Gidravlika*. 2024;(23):24–32. (In Russ.)

11. Incremona GP, Rubagotti M, Ferrara A. Sliding Mode Control of Constrained Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control.* 2017;62(6):2965–2972. https://doi.org/10.1109/TAC.2016.2605043

12. Ley C. *Applied Directional Statistics: Modern Methods and Case Studies.* London: Chapman & Hall/CRC Press; 2018. 318 p. https://doi.org/10.1201/9781315228570

13. Raisch A, Sawodny O. Analysis and Optimal Sizing of Pneumatic Drive Systems for Handling Tasks. *Mechatronics.* 2019;59:168–177. https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2019.04.003

14. Yagoubi M, Bederina H. Surrogate-Assisted NSGA-II Algorithm for Expensive Multiobjective Optimization. In: *Proceedings of the Companion Conference on Genetic and Evolutionary Computation*. New York, NY: Association for Computing Machinery; 2023. P. 431–434. https://doi.org/10.1145/3583133.3590746

15. Deb K, Pratap A, Agarwal S, Meyarivan T. A Fast and Elitist Multi-Objective Genetic Algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation.* 2002;6(2):182–197. https://doi.org/10.1109/4235.996017

Об авторах:

Максим Олегович Шейкин, младший научный сотрудник кафедры гидромеханики и гидравлических машин им. В.С. Квятковского Национального исследовательского университета «МЭИ» (111250, Российская Федерация, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 17), SPIN-код, ORCID, SheykinMO@mpei.ru

Сергей Николаевич Черкасских, кандидат технических наук, доцент кафедры гидромеханики и гидравлических машин им. В.С. Квятковского Национального исследовательского университета «МЭИ» (111250, Российская Федерация, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 17), SPIN-код, ORCID, ScopusID, CherasskikhSN@mpei.ru

Денис Викторович Шилин, кандидат технических наук, доцент кафедры гидромеханики и гидравлических машин им. В.С. Квятковского Национального исследовательского университета «МЭИ» (111250, Российская Федерация, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 17), SPIN-код, ORCID, ScopusID, ResearcherID, ShilinDV@mpei.ru

Владимир Васильевич Феденков, доктор технических наук, профессор кафедры гидромеханики и гидравлических машин им. В.С. Квятковского Национального исследовательского университета «МЭИ» (111250, Российская Федерация, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 17), SPIN-код, ORCID, FedenkovVV@mpei.ru

Заявленный вклад авторов:

М.О. Шейкин: разработка методологии, разработка программного обеспечения, формальный анализ, проведение исследования, визуализация, валидация результатов, написание черновика рукописи.

С.Н. Черкасских: разработка концепции, разработка методологии, формальный анализ, валидация результатов, написание рукописи — рецензирование и редактирование, научное руководство.

Д.В. Шилин: научное руководство.

В.В. Феденков: научное руководство.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Maxim O. Sheykin, Junior Researcher of the Hydromechanics and Hydraulic Machines Department, National Research University MPEI (17, Krasnokazarmennaya Str., Moscow, 111250, Russian Federation), SPIN-code, ORCID, SheykinMO@mpei.ru

Sergey N. Cherkasskikh, Cand.Sci. (Eng.), Associate Professor of the Hydromechanics and Hydraulic Machines Department, National Research University MPEI (17, Krasnokazarmennaya Str., Moscow, 111250, Russian Federation), SPIN-code, ORCID, ScopusID, CherasskikhSN@mpei.ru

Denis V. Shilin, Cand.Sci. (Eng.), Associate Professor of the Hydromechanics and Hydraulic Machines Department, National Research University MPEI (17, Krasnokazarmennaya Str., Moscow, 111250, Russian Federation), SPIN-code, ORCID, ScopusID, ResearcherID, ShilinDV@mpei.ru

Vladimir V. Fedenkov, Dr.Sci. (Eng.), Professor of the Hydromechanics and Hydraulic Machines Department, National Research University MPEI (17, Krasnokazarmennaya Str., Moscow, 111250, Russian Federation), SPIN-code, ORCID, FedenkovVV@mpei.ru

Claimed contributorship:
MO Sheykin: methodology, software, formal analysis, investigation, visualization, validation, writing — original draft preparation.
SN Cherkasskikh: conceptualizations, methodology, formal analysis, validation, writing — review & editing, supervision.
DV Shilin: supervision.
VV Fedenkov: supervision.

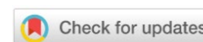
Conflict of Interest Statement: **the authors claimed no conflict of interest.**

All authors have read and approved the final version of manuscript.

Поступила в редакцию / Received 25.01.2025
Поступила после рецензирования / Reviewed 17.02.2025
Принята к публикации / Accepted 24.02.2025

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ
INFORMATION TECHNOLOGY, COMPUTER SCIENCE AND MANAGEMENT





УДК 517.977.56, 532.522.2

https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-65-76

Оригинальное теоретическое исследование

Анализ управляемости и оптимизация формы сопла гидропушки на основе прямого экстремального подхода



EDN: RVWIZA

В.К. Толстых, **Ю.В. Дмитрук** ✉

Донецкий государственный университет, Донецк, Донецкая Народная Республика

✉ mail@tolstykh.com, loktyushina.julia@yandex.ru

Аннотация

Введение. Анализ управляемости является необходимым этапом для корректной постановки и решения любой задачи оптимального управления. Эта проблема становится особенно актуальной в рамках оптимизации систем с распределенными параметрами, которые описываются уравнениями в частных производных. К таким задачам относится рассматриваемая задача оптимизации формы сопла гидропушки. Оптимальное сопло должно обеспечивать максимальное значение функционала, выражаемого через среднюю силу импульса струи гидропушки. Актуальность данного исследования обусловлена отсутствием единого подхода к анализу управляемости систем с распределёнными параметрами, что затрудняет корректную постановку и решение задач оптимизации. В частности, предыдущие попытки решения задачи оптимизации сопла гидропушки с использованием классического вариационного исчисления не увенчались успехом из-за игнорирования аспектов управляемости. Целью данной работы являлось применение нового подхода, предложенного Толстых В.К., к анализу управляемости для решения задачи оптимального дизайна формы сопла гидропушки.

Материалы и методы. В качестве метода исследования использовался анализ управляемости, основанный на условной корректности по Тихонову обратной задачи. Такой подход позволил выявить условия существования градиента целевого функционала и построить регуляризацию решения обратной задачи адаптивными градиентными методами. Это актуально для многоэкстремальных задач, в том числе для задачи оптимальной формы сопла. Она решалась прямым экстремальным подходом в виде непосредственной максимизации целевого функционала на основе его градиента. В процессе исследования использовалась нелинейная, квазиодномерная математическая модель изоэнтропического течения воды в сопле гидропушки. Течение при этом считалось невязким, сжимаемым и дозвуковым.

Результаты исследования. В рамках исследования были получены условия управляемости, которые позволили радикально упростить задачу оптимизации формы сопла гидропушки. Установлено, что для корректного определения градиента целевого функционала необходимо сузить область решения сопряженной задачи до малой прямоугольной области. Использование адаптивных градиентных методов с удовлетворительными шаговыми множителями обеспечило регуляризацию решения. Впервые были найдены две оптимальные формы сопла гидропушки. Первая форма обеспечивает локальный максимум целевого функционала, вторая — глобальный максимум функционала при ограничении на расширение сопла.

Обсуждение и заключение. Полученные результаты показывают, что направленный поиск оптимального решения невозможно осуществить по производной Фреше без учета условий управляемости. Впервые предложенный подход, в сочетании с необходимыми адаптивными градиентными методами оптимизации, позволил не только корректно поставить задачу оптимизации, но и найти оптимальные формы сопла, обеспечивающие максимальную среднюю силу импульса ультраструи. В некоторых случаях для обеспечения устойчивости решения потребовалось введение ограничения на расширение сопла за пределы ствола гидропушки. Это позволило выполнить требования теоремы об управляемости и гарантировало корректность полученных результатов. Теоретическая

значимость приведенного исследования заключается в развитии методов анализа управляемости для систем с распределенными параметрами, что создает новые возможности для решения схожих задач в других областях. Результаты работы могут быть применены для оптимизации устройств, работающих на основе импульсных струй, а также для дальнейшего исследования более сложных моделей течения жидкости.

Ключевые слова: форма сопла, сопло гидропушки, сила импульса струи, ограничение на расширение сопла, максимизация целевого функционала, градиент

Благодарности. Авторы выражают признательность за плодотворные обсуждения материалов работы научным коллективам кафедр компьютерных технологий и общей физики Донецкого государственного университета и Донецкого института государственной противопожарной службы Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий.

Финансирование. Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДОНГУ» при финансовой поддержке Азово-Черноморского математического центра (Соглашение от 27.02.2025 № 075–02–2025–1608), а также в рамках госбюджетной темы «Разработка интеллектуальных систем анализа и прогнозирования состояния природно-технических объектов (FRRE-2023–0012)» (номер госрегистрации 124012400344-1).

Для цитирования. Толстых В.К., Дмитрук Ю.В. Анализ управляемости для системы с распределенными параметрами в задаче оптимального дизайна формы сопла гидропушки. *Advanced Engineering Research* (*Rostov-on-Don*). 2025;25(1):65–76. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-65-76

Original Theoretical Research

Controllability Analysis and Optimization of Hydrocannon Nozzle Shape Based on Direct Extreme Approach

Victor K. Tolstykh, **Yuliia V. Dmitruk** ✉
Donetsk State University, Donetsk, Donetsk People's Republic
✉ mail@tolstykh.com, loktyushina.julia@yandex.ru

Abstract

Introduction. Controllability analysis is a required stage for the correct formulation and solution of any optimal control problem. This problem becomes specifically relevant in the context of optimizing systems with distributed parameters, which are described by partial difference equations. Such problems include the considered problem of optimization of the shape of the nozzle of a hydrocannon. The optimal nozzle should provide the maximum value of the functional expressed through the average force of the impulse of the jet of a hydrocannon. The relevance of this research is due to the lack of a unified approach to the analysis of controllability of systems with distributed parameters, which complicates the correct formulation and solution of optimization problems. In particular, previous attempts to solve the problem of hydrocannon nozzle optimization using classical variational calculus were unsuccessful due to ignoring aspects of controllability. The objective of this research was to apply a new approach proposed by V.K. Tolstykh to controllability analysis to solve the problem of optimal design of the shape of a hydrocannon nozzle.

Materials and Methods. The research method used was controllability analysis based on the Tikhonov conditional correctness of the inverse problem. This approach allowed us to identify the conditions for the existence of the gradient of the objective functional and construct a regularization of the solution to the inverse problem using adaptive gradient methods. It was of current interest for multiextremal problems, including the problem of the optimum nozzle shape. It was solved by a direct extreme approach in the form of direct maximization of the objective functional based on its gradient. In the process of research, a nonlinear, quasi-one-dimensional mathematical model of isentropic water flow in a hydrocannon nozzle was used. The flow was considered inviscid, compressible, and subsonic.

Results. As part of the research, controllability conditions were obtained that allowed us to radically simplify the problem of optimizing the shape of the hydrocannon nozzle. It was found that in order to correctly determine the gradient of the objective functional, it was required to narrow the solution area of the conjugate problem to a small rectangular area. The use of adaptive gradient methods with satisfactory step factors provided for the regularization of the solution. For the first time, two optimum shapes of the hydrocannon nozzle were found. The first shape provided a local maximum of the objective functional, the second — a global maximum of the functional with a restriction on the expansion of the nozzle.

Discussion and Conclusion. The results obtained show that it is impossible to perform a directed search for an optimal solution using the Frechet derivative without taking into account controllability conditions. The first proposed approach, in combination with the desired adaptive gradient optimization methods, allowed us not only to correctly formulate the optimization problem, but also to find optimal nozzle shapes that provided the maximum average pulse force of the ultrajet. In some cases, for the stability of the solution, it was necessary to introduce expansion limitation of the nozzle beyond the barrel of the hydrocannon. This made it possible to meet the requirements of the controllability theorem and

guaranteed the correctness of the results obtained. The theoretical relevance of the research is in the development of controllability analysis methods for systems with distributed parameters, which creates new opportunities for solving similar problems in other areas. The research results can be used to optimize devices operating on the basis of pulsed jets, as well as for further study of more complex models of fluid flow.

Keywords: nozzle shape, hydrocannon nozzle, jet impulse force, nozzle expansion limitation, maximization of objective functional, gradient

Acknowledgements. The authors appreciate the scientific teams of the Departments of Computer Technology and General Physics, Donetsk State University, and Donetsk Institute of State Fire Service, the RF Ministry for Civil Defense, Emergencies and Elimination of Consequences of Natural Disasters, for fruitful discussions of the research materials.

Funding Information. The research is done at the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "DONSU" with the financial support from the Azov-Black Sea Mathematical Center (Agreement No. 075–02–2025–1608, dated 02.27.2025), as well as within the framework of the state-financed research "Development of Intelligent Systems for Analyzing and Forecasting the Condition of Natural and Technical Facilities (FRRE-2023–0012)" (State Registration No. 124012400344-1).

For citation. Tolstykh VK, Dmitruk YuV. Controllability Analysis and Optimization of Hydrocannon Nozzle Shape Based on Direct Extreme Approach. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2025;25(1):65–76. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-65-76

Введение. Несмотря на значительное количество исследований в области теории управления, до сих пор отсутствует единый подход к анализу управляемости для систем с распределенными параметрами. Существующие работы, как правило, ограничиваются рассмотрением управляемости как возможности перевода системы из начального состояния в заданное финальное [1]. Однако такой подход оказывается недостаточным для задач оптимизации пространственно-распределенных систем, описываемых уравнениями в частных производных. Управляемость по финальному состоянию не гарантирует управляемость по условиям, заданным в целевом функционале, что делает анализ таких систем сложным и неочевидным. В данной работе авторы предлагают использовать понятие управляемости, предложенное Толстых В.К. [2], и применить его для поиска оптимальной формы сопла гидропушки.

Гидропушки, предназначенные для формирования импульсных струй жидкости высокого давления, находят широкое применение, например, в горной промышленности для разрушения горных пород [3]. Эффективность таких устройств во многом зависит от формы сопла [4], что делает задачу его оптимизации актуальной. Несмотря на значительный интерес к этой проблеме, существующие исследования, такие как работы Зуйковой З. Г. [5], Зубова В.И. [6] и Атанова Г. А. [7], носят преимущественно теоретический характер. Авторы этих работ сформулировали необходимые условия оптимальности, однако численные результаты не подтверждались доказательствами их оптимальности. Более того, как будет показано в данной работе, ранее полученные «оптимальные» формы сопел не являются таковыми. Таким образом, несмотря на многолетние исследования, проблема дизайна оптимальной формы сопла остается нерешенной.

Решение этой сложной задачи возможно только при использовании прямого экстремального подхода с оригинальными адаптивными градиентными методами, описанными в работе Толстых В.К. [8]. Целью данной работы являлось применение нового подхода, предложенного в работе [2], к анализу управляемости системы с распределенными параметрами для задачи оптимального дизайна формы сопла гидропушки. Таким образом, статья направлена на развитие теории управляемости для систем с распределенными параметрами и демонстрацию ее практической применимости на примере оптимизации формы сопла гидропушки.

Материалы и методы. Суть прямого экстремального подхода заключается в непосредственной максимизации градиентными методами некоторого целевого функционала:

$$J(u)=\int_{\omega} I(v,u)\,d\omega \to max,\ \omega\subset\bar{\Omega},$$
$$\text{при условии } \mathbb{D}(v,u)v=0 \text{ на } \bar{\Omega}. \quad (1)$$

Здесь управление (в нашем случае — функция формы сопла по длине x) $u(x) \in U(S)$, $S = (x_a, x_b)$ — область определения управления, U — допустимое множество управлений, $v(x, t) \in V(\bar{\Omega})$ — состояние нестационарного процесса формирования ультраструи на замкнутом пространственно-временном множестве $\{x, t\} = \bar{\Omega}$. Оператор $\mathbb{D}$ включает в себя конкретный вид дифференциальных уравнений течения воды в гидропушке и действует на v. Функция цели $I(v, u)$ определена на множестве ω, а ее значение явно зависит от параметров v и u.

В прямом подходе не используются какие-либо промежуточные (например, необходимые условия оптимальности), а непосредственно решается задача:

$$u_* = arg\,max\,J(u), \quad (2)$$

где u_* — оптимальное управление.

Исходная задача с уравнениями распределенной системы $\mathbb{D}(v, u)v = 0$ характеризуется прямым отображением:

$$U(S) \to V(\bar{\Omega}),\ S \subset \bar{\Omega}.$$

В то же время задача оптимизации (1) является обратной. Такие задачи, как правило, некорректны в классическом смысле [9]. Решение прямых и обратных задач существенно различается. Последние требуют регуляризации решения до сужения множества возможных решений U до компакта корректности $\mathcal{U} \subseteq U$ что приводит к условной корректности по Тихонову. В прямом экстремальном подходе регуляризация осуществляется градиентными методами.

Согласно определению управляемости [2], распределенная система в задаче (1) будет управляема посредством $u(x) \in U(S)$ относительно целевого функционала J, когда корректной по Тихонову будет обратная задача отображения элементов пространства $V(\omega)$ состояний модели в элемент u_* при условии $max\ J$:

$$V(\omega) \xrightarrow{max\,J} u_* \in U(S),\quad \omega \subset \bar{\Omega}.$$

Далее, при решении задачи (2), сделаем анализ управляемости и получим условия управляемости, которые позволят корректно поставить и решить задачу оптимизации формы сопла гидропушки градиентными методами [10].

В работе [8] подробно описана постановка рассматриваемой задачи для дозвуковых, осесимметричных течений сжимаемой жидкости в плавно меняющихся каналах. Напомним ее в форме, необходимой для дальнейших исследований. Изоэнтропическое движение воды в сопле описывается квазиодномерной, квазилинейной гиперболической системой уравнений [11]:

$$\mathbb{D}v = \frac{\partial v}{\partial t} + A\frac{\partial v}{\partial x} + F = 0 \text{ на } \Omega. \tag{3}$$

Состояние системы характеризуется вектор-функцией $v = \{\rho, w\} \in V(\bar{\Omega})$, где ρ — плотность воды, w — скорость воды. Оператор $\mathbb{D} = \frac{\partial}{\partial t} + A\frac{\partial}{\partial x} + F$, его матрица $A(v) = \begin{pmatrix} w & \rho \\ \frac{c^2}{\rho} & w \end{pmatrix}$ и вектор $F(v,u) = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi = \rho w u \Theta(x - x_a)$, Θ — тета-функция Дирака, x_a — начало сопла в конце ствола гидропушки, $c^2 = \frac{Bn\rho^{n-1}}{\rho_0^n}$ — квадрат скорости звука в воде, B и n — постоянные в уравнении состояния воды в форме Тета.

Управление описывается формулой:

$$u(x) = \frac{1}{\sigma(x)}\frac{d\sigma(x)}{dx} \in U(S),\quad S = (x_a, x_b). \tag{4}$$

Здесь σ — площадь поперечного сечения сопла, $\sigma(x) = \sigma_a e^{\int_{x_a}^{x} u(\zeta)d\zeta}$, $x \in [x_a, x_b]$, $\sigma_a = \sigma(x_a)$. В стволе гидропушки при $x \le x_a$ управление $u(x)$ отсутствует, а свободный член $\varphi = 0$.

Граничные и начальные условия задачи (3):

$$\frac{dw}{dt} + \frac{uB}{m_p}\left(\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - 1\right) = 0 \text{ на } \Gamma_p,$$

$$\rho = \rho_0 \text{ на } \Gamma_{b0} \cup \Gamma_{b1},$$

$$v(x, t_0) = (\rho_0, w_0) \text{ на } \Gamma_0.$$

Здесь m_p — масса поршня, ρ_0 — плотность воды при атмосферном давлении, w_0 — скорость воды и поршня до начала втекания в сопло. Границы процесса Γ для области Ω показаны на рис. 1. Вид Ω важен для анализа управляемости.

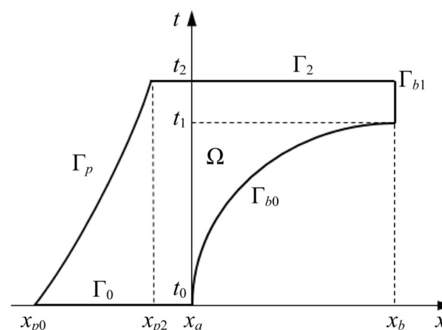


Рис. 1. Область течения воды в гидропушке

Уточним Ω. Начало координат совмещено со входом в сопло x_a, а t_0 — время начала втекания воды в сопло. С одной стороны, вода ограничена поршнем, движущимся в стволе гидропушки по траектории Γ_p, а с другой — свободной поверхностью втекания Γ_{b0} от t_0 до t_1 и истечения Γ_{b1} от t_1 до t_2. Линия начального состояния системы (3) — это Γ_0, координаты x_{p0} и x_{p2} — начальное и конечное положение поршня. Указанные Г-линии для Ω образуют замыкание $\bar{\Omega}$. Область определения управления $S = P_x(\Omega\big|_{x>x_a})$, т. е. при $x > x_a$ S является проекцией части области Ω на ось x.

Задача оптимизации (оптимального дизайна формы сопла) формулируется следующим образом: необходимо найти управление $u(x)$, доставляющее максимум функционалу:

$$J(u) = \int_{t_1}^{t_2} I(w,u)\big|_{\omega} dt, \quad I(w,u)\big|_{\omega} = \frac{\rho_0 \sigma(x_b) w^2(x_b,t)}{t^2 - t^1}. \quad (5)$$

Целевой функционал задается на $\omega = \Gamma_{b1}$, т. е. на срезе сопла гидропушки и определяет среднюю силу действия струи на возможную преграду [12].

Градиентный алгоритм для максимизации функционала (5) имеет вид:

$$u^{k+1}(x) = u^k(x) + b^k \nabla J(u^k; x), \quad x \in S, \quad k = 0, 1\ldots, \quad (6)$$

где k — номер итерации; b^k— шаговый множитель, регулирующий подъем к $max\ J$ в направлении градиента ∇J^k.

Градиент представляет собой функциональную производную Фреше J'_u, которую можно найти из первой вариации целевого функционала $\delta J = \langle J'_u, \delta u\rangle_{U^*(S)}$. Здесь угловые скобки означают скалярное произведение, в данном случае — в сопряженном пространстве управлений $U^*(S)$. Верхний индекс * означает сопряженность.

Следует отметить, что иногда градиент функционала на Гильбертовом пространстве путают с производной Фреше этого функционала [13]. Производная $J'_u(u; x)$ может быть нечувствительна к управлению $u(x)$ на всем множестве S или на частях S ненулевой меры. Поэтому в общем случае $J'_u(u; x)$ в (6) не будет указывать достоверное направление коррекции u^k для направленного поиска оптимального решения $u_*(x)$. Градиент из производной Фреше можно получить только при реализации условий управляемости.

Ранее упоминались подходы к решению задач оптимизации сопла гидропушки с целью максимизации средней силы импульса струи [5], функционала, зависящего от параметров течения [6], а также максимизации скорости истечения [7]. В этих работах после варьирования δJ получено формальное выражение для производной J'_u. Оно зависит от решения $f = (f_1, f_2) \in V^*(\bar{\Omega})$ линейной сопряженной гиперболической задачи:

$$-\frac{\partial f}{\partial t} - A^T \frac{\partial f}{\partial x} + F_v'^T f = 0 \text{ на } \Omega . \quad (7)$$

Верхний индекс T означает транспонирование, F'_v — производная свободного члена F по v. Граничные и начальные (терминальные на Γ_2) условия:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_p f_2}{F_a \rho}\right) + f_1 \rho = 0 \text{ на } \Gamma_p,$$

$$f_1 = 0 \text{ на } \Gamma_{b0},$$

$$\rho_0 f_1 + w_b f_2 + I'_w = 0, \quad I'_w\big|_{\omega} = \frac{2\rho_0 \sigma_b w_b}{t_2 - t_1} \text{ на } \Gamma_{b1},$$

$$f_1 = 0, f_2 = 0 \text{ на } \Gamma_2.$$

Производную Фреше J'_u иногда называют невязкой или градиентом. Ее удобнее представить в операторном виде:

$$J'_u(u; x) = \mathbb{U}^*_{\varnothing} f(x,t) \equiv \mathbb{U}^* f(x,t) + \kappa J \in U^*(S). \quad (8)$$

Здесь сопряженный неоднородный оператор $\mathbb{U}^*_{\varnothing} = \mathbb{U}^* + \kappa J$, $\mathbb{U}^*$— сопряженный однородный оператор, точка означает место аргумента f операторов, κ — весовой коэффициент выравнивания вычислительных помех численного решения исходной и сопряженной задач [8]. В выражении (8) присутствует значение функционала в виде числа J. Это значение производной I'_u.

Неоднородность оператора $\mathbb{U}^*_{\varnothing}$ — следствие зависимости целевой функции $I(w, u)$ от управления u. Такая зависимость является редкой особенностью задач оптимизации и может заметно осложнить вычисление градиента.

Значение однородного оператора $\mathbb{U}^*$ в производной (8) имеет вид:

$$\mathbb{U}^* f = \int_{\Gamma_{b0}}^{t_2} F_u'^T f dt = \int_{\Gamma_{b0}}^{t_2} \rho w f_1 dt,$$

где интегрирование производится от нижней нелинейной границы Γ_{b0} (рис. 1) при втекании воды в сопло.

Смысл и предназначение сопряженной задачи заключается в отображении производной I'_w (чувствительность J к w) из области ω в область S, где определены градиент и управление. Такое отображение при помощи f делается с использованием промежуточного множества $\mathbf{\Omega} \subset \bar{\Omega}$, которое, согласно управляемости, задает корректную область $V^*(\mathbf{\Omega})$ определения однородного оператора $\mathbb{U}^*$, чтобы в выражении (8) из J'_u получить градиент ∇J.

То есть сопряженная задача реализует отображение:

$$f : V^*(\omega) \to V^*(\mathbf{\Omega}).$$

Далее при помощи оператора $\mathbb{U}^* : V^*(\mathbf{\Omega}) \to U^*(S)$ можно получить градиент из производной Фреше J'_u:

$$J'_u \mathbb{U}^*_\varnothing \to \mathbb{U}^*_\varnothing f\big|_{\mathbf{\Omega}} = \nabla J \in U^*(S).$$

Область $\mathbf{\Omega}$ выявляется из анализа управляемости.

Результаты исследования. Требования к условиям управляемости в рамках прямого экстремального подхода сформулированы в следующей теореме (доказательство см. в [2]).

Теорема. Математическая модель $\mathbb{D}(v, u)v = 0$ в задаче (3) управляема посредством $u(x)$ на S по функционалу J если:

1) существует область $V^*(\mathbf{\Omega})$, $\mathbf{\Omega} \subset \bar{\Omega}$ корректного сопряженного состояния, которая является областью определения оператора $\mathbb{U}^*$ с его значениями в области градиентов $U^*(S)$;

2) оператор $\mathbb{U}^*$ — невырожденный;

3) алгоритм (6) при $u^0 \in \mathcal{U}$ использует удовлетворительные параметры регуляризации b^k.

Начнем с первого и наиболее сложного требования теоремы. Сначала необходимо убедиться в классической корректности исходной и сопряженной задач. Исходная (3) и сопряженная (7) системы относятся к типу гиперболических. Собственные числа матриц A и A^T одинаковы. Поэтому в обеих системах будут одинаковыми характеристики $\xi_{1,2}$ — как траектории распространения возмущений в плоскости (x, t) вдоль характеристических направлений $\dfrac{d\xi_{1,2}}{dt} = w \pm c$. Сопряженные волны, порождаемые производной $I'_w\big|_\omega \in V^*(\omega)$ на срезе сопла $\Gamma_{b1} = \omega$, будут двигаться с теми же характеристиками, что и исходные, но в обратном направлении. Начальное условие для сопряженной задачи задано на терминальной линии Γ_2.

Все характеристики в области Ω выходят из участков границы $\partial\Omega$ с известными решениями, заданными краевыми условиями. При течении безударных волн (именно такие течения рассматриваем в данном исследовании) характеристики одного и того же семейства не будут пересекаться, а на пересечении двух характеристик разного семейства ξ_1 и ξ_2 в любой точке $\bar{\Omega}$ может быть найдено решение гиперболической системы двух уравнений [14] в виде двумерных вектор-функций v и f.

Чтобы найти область определения оператора $\mathbb{U}^*$, нужно провести анализ и выявить существование следующей последовательности отображений, начиная от управления $u \in U(S)$ и заканчивая градиентом $\nabla J \in U^*(S)$:

$$U(S) \ni u \xrightarrow{\text{однозначно}} I'_w\big|_\omega \xrightarrow{\text{однозначно}} f\big|_{\mathbf{\Omega}} \in V^*(\mathbf{\Omega}) \xrightarrow{\mathbb{U}^*} U^*(S).$$

Можно проще описать обсуждаемую проблему. Во-первых, целевой функционал $J(u)$, заданный на ω, должен быть чувствителен к управлению, заданному на S (чувствительность характеризуется производной $I'_w\big|_\omega$). Во-вторых, из множества сопряженных решений на всем $\bar{\Omega}$ надо выделить такое подмножество $\mathbf{\Omega}$, где сопряженные решения $f\big|_{\mathbf{\Omega}}$ будут однозначно зависеть от значений целевого функционала в виде $I'_w\big|_\omega$. На всей области $\bar{\Omega}$ такой зависимости может и не быть. В-третьих, множество $\mathbf{\Omega}$ должно обеспечивать оператору $\mathbb{U}^*$ возможность отображения сопряженных состояний $f\big|_{\mathbf{\Omega}}$ в $U^*(S)$. Такое отображение представлено последней веткой, где оператор $\mathbb{U}^*$ из полученной области определения $V^*(\mathbf{\Omega})$ может произвести отображение в область значений $U^*(S)$, где существует градиент $\Delta J = \mathbb{U}^*_\varnothing f\big|_{\mathbf{\Omega}}$.

Из корректности исходной прямой задачи следует, что любые функции $u(x) \in U(S)$ будут однозначно влиять на значение производной целевой функции I'_w на $\omega = \Gamma_{b1}$ через характеристики ξ_1, если хотя бы одна из них прошла через все сопло. Потеря такого влияния возможна при наличии диссипаций в системе, но при изоэнтропических течениях этого нет. То есть имеет место левая ветка отображений в (9):

$$U(S) \ni u \xrightarrow{\text{однозначно}} I'_w\big|_\omega .$$

Перейдем к выявлению множества $\mathbf{\Omega}$, необходимого для области $V^*(\mathbf{\Omega})$ определения оператора $\mathbb{U}^*$. Член $I'_w\big|_\omega$ в граничном условии сопряженной задачи (7) вызывает возмущения сопряженного решения f. Они распространяются в виде волн по характеристикам первого семейства ξ_1 в обратном временном направлении от среза сопла в сторону поршня (рис. 2).

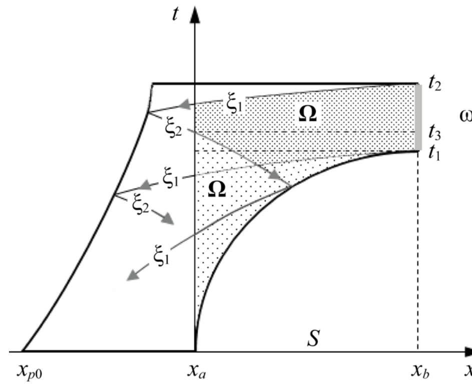


Рис. 2. Пространственно-временная диаграмма области **Ω** с избыточной областью ω

Эти возмущения распространяются вдоль всего сопла и переносят информацию о целевом функционале из точек ω в точки на $S = (x_a, x_b)$. На поршне волны, описываемые характеристиками первого семейства ξ_1, отражаются и, меняя направление своего распространения, продолжают переносить информацию, полученную от ξ_1 о возмущениях $I'_w\big|_\omega$, добавляя при этом новую информацию о движении поршня. Такой процесс отражений волн от поршня и от внутренней части сопла продолжается до момента t_0.

Начиная с момента t_3 и ниже, в одну и ту же точку некоторых участков множества S будут приходить две сопряженные волны ξ_1 и ξ_2, порожденные разными значениями I'_w и с ненужной информацией (помехами), как минимум, от поршня. А ниже характеристики ξ_1, вышедшей из сопла ниже t_1, будет добавлена еще и ненужная информация от сопла. Эта информация не нужна, т. к. не содержит сведений о цели оптимизации из $I'_w\big|_\omega$.

На рис. 2 показан пример возможного множества **Ω** (вся заштрихованная с разной плотностью область под верхней характеристикой ξ_1 от x_a до x_b). В данном случае **Ω** соответствует производной Фреше J'_u. В области **Ω**, под характеристикой ξ_2 (отражение ξ_1, вышедшей при t_2) и под ξ_1 (вышедшей при t_1) образуется светлая область неоднозначного влияния значений функции $I'_w\big|_\omega$ на сопряженное состояние f. Очевидно, что бессмысленно решать сопряженную задачу и рассчитывать градиент в такой области **Ω**.

Разумно ограничиться рассмотрением (рис. 2) сопряженного состояния f на части **Ω**, заключенной в прямоугольнике:

$$\Omega_1 = (x_a, x_b) \times (t_1, t_2).$$

При этом прямоугольник Ω_1 следует считать слишком большим, если поршень находится относительно близко к началу сопла, оказывая влияние на сопряженное состояние.

В таком прямоугольнике Ω_1 множество **Ω** (заштриховано с разной плотностью на рис. 2 от t_1 до t_2) будет соответствовать избыточному множеству ω. То есть в целевом функционале J интервал (t_1, t_2) будет избыточным. При этом в рассматриваемой области **Ω** могут присутствовать неприемлемые помехи слева (малая плотность штриховки в Ω_1) для вычисления градиента ∇J.

Избыточность ω устраняется дальнейшим сокращением Ω_1 до $t_3 = t_1$, т. е. когда t_3 соответствует началу истечения (рис. 3 *а*).

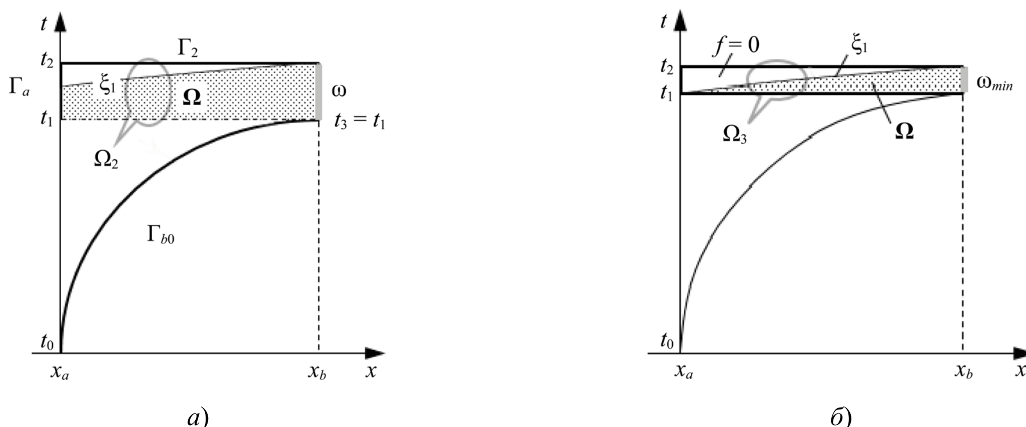


Рис. 3. Пространственно-временные диаграммы корректных областей **Ω** для определения градиента:
а — **Ω** в области Ω_2; *б* — **Ω** в области Ω_3

Информатика, вычислительная техника и управление

В этом случае вся область достаточного решения сопряженной задачи сужается до еще меньшего прямоугольника:

$$\Omega_2 = (x_a, x_b) \times (t_3 = t_1, t_2).$$

Здесь поршень не будет «мешать» отображению $I'_w\big|_\omega \xrightarrow{\text{однозначно}} f\big|_{\mathbf{\Omega}}$.

Если по техническим условиям конструирования гидропушки допускается еще большее сокращение времени истечения $t_2 - t_1$, то можно уменьшить прямоугольник решения сопряженной задачи еще сильнее, до прямоугольника Ω_3 с соответствующей треугольной областью $\mathbf{\Omega}$ (рис. 3 *б*):

$$\Omega_3 = (x_a, x_b) \times (t_1, t_2).$$

Здесь имеет место минимально достаточное множество ω_{min} для формирования области определения $V^*(\mathbf{\Omega})$ оператора $\mathbb{U}^*$.

Именно в полученных областях $\mathbf{\Omega}$, находящихся внутри Ω_2 и Ω_3 (рис. 3), существует область определения $V^*(\mathbf{\Omega})$ оператора $\mathbb{U}^*$ с однозначным отображением производных $I'_w\big|_\omega$ посредством f в область значений градиента $U^*(S)$.

Сопряженная задача (7) и ее решение в прямоугольниках $\Omega_{2,3}$ становятся существенно проще:

$$-\frac{df}{dt} - A^T\frac{df}{dx} + F_v'^T f = 0 \text{ на } \Omega_{2,3},$$
$$f = 0 \text{ на } \Gamma_a \cup \Gamma_2, \tag{10}$$
$$\rho_0 f_1 + w_b f_2 + I'_w = 0 \text{ на } \Gamma_{b1}.$$

Здесь $\Gamma_a = x_a \times (t_1, t_2)$. Теперь нет влияния поршня с линии Γ_p и нет втекания в сопло на границе Γ_{b0}.

Формула (8) расчета градиента целевого функционала также принимает упрощенный вид (нет нелинейной границы интегрирования Γ_{b0}):

$$\nabla J(u; x) = \mathbb{U}^*_\varnothing f = \int_{t_1}^{t_2} \rho w f_1 dt + \kappa J, \quad x \in (x_a, x_b). \tag{11}$$

Полученное множество $\mathbf{\Omega} \subset \Omega_{2,3}$ будет корректно задавать область $V^*(\mathbf{\Omega})$ определения оператора $\mathbb{U}^*(\mathbf{\Omega})$ с областью значений в $U^*(S)$. Соответствующее выражение времени, необходимое для формирования такого $\mathbf{\Omega}$, зависит от характеристик первого семейства ξ_1 и имеет вид:

$$t_2 \geq t_1 + \int_{x_a}^{x_b} \frac{dx}{w + c}, \quad t_1 \geq t_3. \tag{12}$$

То есть, во-первых, верхняя характеристика ξ_1 должна пройти через всё сопло от x_b до x_a, во-вторых, начало истечения t_1 не должно быть меньше момента t_3 начала попадания в сопло волн, отражённых от поршня.

Данное выражение является условием управляемости в рассматриваемой задаче. При этом выполняются оставшиеся ветки отображений (9):

$$I'_w\big|_\omega \xrightarrow{\text{однозначно}} f\big|_{\mathbf{\Omega}} \xrightarrow{\mathbb{U}^*} U^*(S).$$

Теперь обсудим требование 2 в теореме о невырожденности оператора $\mathbb{U}^*$. Начнем с оператора $\mathbb{U}^*_\varnothing$, задающего градиент (8). Если бы целевая функция I не зависела явно от управления u, то $\mathbb{U}^*_\varnothing \equiv \mathbb{U}^*$ и множество сопряженных состояний в ядре $f_{ker} = \{f : \mathbb{U}^* f = 0 \text{ на } S\}$ было бы нулевым при неограниченном оптимальном управлении u_*. В нашем же случае для $\mathbb{U}^*_\varnothing$ значения элементов ядра f_{ker} не будут нулевыми, т. е. оптимальному управлению будут соответствовать ненулевые сопряженные состояния. Нижний индекс $\varnothing$ означает отсутствие нулевого ядра. Очевидно, что если $\mathbb{U}^*$ был невырожденным, то и оператор $\mathbb{U}^*_\varnothing$ будет невырожденным. Неоднородность оператора $\mathbb{U}^*_\varnothing$ в нашей задаче приводит всего лишь к смещению нулевого ядра однородного оператора $\mathbb{U}^*$.

Оценим возможную вырожденность однородного оператора $\mathbb{U}^*$. Очевидно, что при любых значениях ρ и w результат интегрирования в $\mathbb{U}^* f = \int_{t_1}^{t_2} \rho w f_1 dt$ может стать нулевым на S только при $f_1 = 0$ на $\mathbf{\Omega}$. Это означает, что оператор $\mathbb{U}^*$ — невырожденный, а следовательно, и $\mathbb{U}^*_\varnothing$ — невырожденный.

Остается последнее требование теоремы. Регуляризация в прямом экстремальном подходе обеспечивается:

– выбором начального приближения $u^0 \in \mathcal{U}$;

– последующими шагами алгоритмов типа (6) с удовлетворительным параметром регуляризации, т. е. с параметром b^k, не выводящим управление u^{k+1} за пределы компакта $\mathcal{U}$.

В работе [8] описаны необходимые регуляризирующие градиентные методы для алгоритма (6) в рассматриваемой задаче.

Таким образом, все требования теоремы для обеспечения управляемости выполнены. Распределенная система (3) управляема посредством $u(x)$ на S по функционалу J (5) при условии (12).

Результаты использования условий управляемости для гидропушки. Параметры экспериментальной установки были заимствованы из исследования А. Н. Семко [15]:

– начало координат $x_a = 0$;

– длина сопла $x_b = 0{,}253$ м;

– начальное положение поршня с левой границей воды $x_{p0} = -0{,}28$ м;

– масса поршня $m_p = 2{,}25$ кг;

– начальная скорость поршня и воды $\omega_0 = 76{,}2$ м/с;

– плотность воды при атмосферном давлении $\rho_0 = 10^3$ кг/м^3;

– радиус ствола гидропушки $R_a = 33 \cdot 10^{-3}$ м;

– начало втекания воды в сопло $t_0 = 0$.

Исходная задача решалась в сложной замкнутой области $\bar{\Omega}$, а сопряженная — на небольшом прямоугольнике $\bar{\Omega}_2 = [x_a, x_b] \times [t_1, t_2]$. Были построены две пространственные сетки, каждая из которых содержит 50 шагов. Первая сетка является подвижной и используется для расчета течения воды от поршня до среза сопла, тогда как вторая сетка неподвижна и предназначена для описания формы сопла. Количество слоев по времени было переменным и доходило до 10^3. Точное значение зависит от формы сопла и определяется конечным временем t_2. Исходная и сопряженная задачи решалась методом характеристик на одинаковых подвижных сетках в $\bar{\Omega}$ и в $\bar{\Omega}_2$ соответственно.

Начало истечения струи из сопла наблюдалось при $t_1 \approx 2{,}7 \cdot 10^{-3}$ с. Среднее значение силы импульса полученной струи оценивалось по целевому функционалу $J(u)$ в интервале $t_2 - t_1 = 3 \cdot 10^{-4}$ с. Данный интервал составляет примерно $2\int_{x_a}^{x_b} \frac{dx}{w+c}$. При этом время начала истечения $t_1 > t_3$, т. е. поршень не влияет на истечение. Таким образом, заданное время t_2 удовлетворяет условию управляемости (12).

В работе [8] реализованы необходимые адаптивные вычислительные экстремальные алгоритмы с учетом описанных здесь условий управляемости и приведены впервые полученные оптимальные формы сопла.

На рис. 4 сопло 1 соответствует внутреннему локальному максимуму функционала $J(u)$, а сопло 2 — краевому максимуму при ограничении на расширение сопла: $u(x) \le 0$, $\forall x \in S$. Первое сопло практически имеет форму конуса, в то время как второе обеспечивает целевому функционалу достижение глобального максимума, значение которого J примерно в три раза превышает значение, полученное для первого сопла.

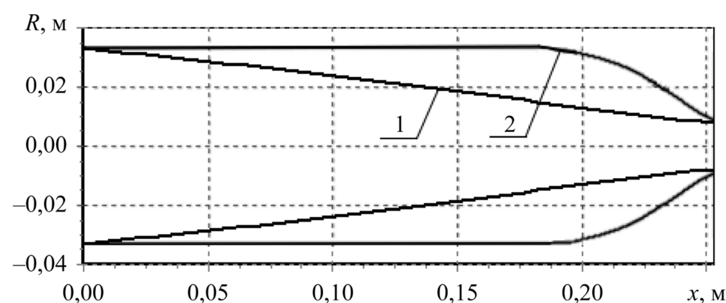


Рис. 4. Оптимальные формы сопла гидропушки

Начальное приближение $u^0(x)$ задавалось в виде трубы — как продолжение ствола пушки. На первых итерациях сужения сопла рост функционала $J(u)$ происходил при его выпуклости (рост нормы ∇J). Далее выпуклость сменилась на вогнутость (убывание нормы ∇J), в конце которой находились очень малые области максимума (минимальная норма ∇J при вогнутости функционала) с последующим выпуклым минимумом. В локальном максимуме было получено сопло 1. Переход через эти локальные экстремумы сопровождался далее неограниченным выпуклым ростом $J(u)$. Только добавление ограничения на управление позволило остановить неконтролируемое расширение сопла на границе с разумной формой 2.

Напомним, что ранее предпринимались попытки получить удовлетворительное решение с помощью классического вариационного исчисления. Для этого авторы работ [5] и [7] задействовали методы релаксации для поиска корня u_* из необходимого условия оптимальности $J_u'(u;\, x) = 0$ (производная Фреше J_u' на некорректном $\mathbf{\Omega}$ из рис. 2). Однако такой подход не дал желаемых результатов. Более того, он требует дополнительного ограничения на площадь среза сопла для предотвращения его схлопывания. Такое схлопывание также подтверждает некорректность использования $J_u'(u;\, x)$ для направленного поиска $u_*(x)$ без выделения области управляемости $\mathbf{\Omega}$ внутри $\Omega_{2,3}$. Иными словами, вместо производной Фреше необходимо получить градиент с обоснованием.

Обсуждение и заключение. Результаты исследования демонстрируют, что применение анализа управляемости, предложенного в работе [2], позволило выявить ключевые условия управляемости (12), необходимые для корректной постановки и решения задачи оптимизации формы сопла гидропушки.

Согласно условиям управляемости, задачу оптимизации необходимо ставить и решать в малой прямоугольной области Ω_2 или даже Ω_3, а не в большой и сложной области Ω. Это связано с тем, что задача оптимизации формы сопла с постановкой в Ω не приводит производную Фреше J_u' к градиенту ∇J, что делает невозможным направленный поиск оптимального решения. Именно это обстоятельство стало причиной неудач предыдущих исследований, где оптимальность решений не была доказана.

Рекомендуем сначала делать анализ управляемости до выявления корректной области управляемости $\mathbf{\Omega}$, а потом для полученной $\mathbf{\Omega}$ выделять область решения сопряженной задачи (в нашем случае — это Ω_2 или Ω_3) и находить вариацию $\delta J = \langle J_u', \delta u \rangle_{U^*(S)}$. Затем можно продолжить анализ управляемости и из производной J_u' получить градиент ∇J. Именно с помощью $\mathbf{\Omega}$ внутри $\Omega_{2,3}$ можно найти значение градиента $\nabla J(u;\, x)$, которое распределено вдоль всего сопла и однозначно соответствует целевому функционалу задачи $J(u)$. Далее можно целенаправленно искать оптимальную форму сопла.

Основное преимущество предложенного подхода заключается в использовании прямого экстремального метода, который позволяет непосредственно максимизировать целевой функционал с помощью градиентных алгоритмов. Это обеспечивает не только наглядность анализа управляемости, но и возможность получения численно подтвержденных оптимальных решений.

Теоретическая ценность исследования состоит в развитии методов анализа управляемости для систем с распределенными параметрами, что открывает новые перспективы для решения аналогичных задач в других областях. Дальнейшие исследования могут быть направлены на расширение метода для более сложных моделей течения жидкости, а также на оптимизацию других устройств, работающих на основе импульсных струй.

Список литературы / References

1. Егоров А.И., Знаменская Л.Н. *Введение в теорию управления системами с распределенными параметрами*. СПб: Лань; 2022. 292 с. URL: https://e.lanbook.com/book/167413 (дата обращения: 10.11.2024).

Egorov AI, Znamenskaya LN. *Introduction to Distributed Parameter Control Theory*. St. Petersburg: Lan; 2022. 292 p. (In Russ.) URL: https://e.lanbook.com/book/167413 (accessed: 10.11.2024).

2. Tolstykh VK. Controllability of Distributed Parameter Systems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2024;64(6):1211–1223. https://doi.org/10.1134/S0965542524700453

3. Мерзляков В.Г., Деревяшкин И.В., Бойкова И.Е., Толмачев А.И. Разрушение угля и горных пород высокоскоростными струями воды. *Горный информационно-аналитический бюллетень*. 2023;(4):140–156. URL: https://giab-online.ru/files/Data/2023/4/04_2023_140-156.pdf (дата обращения: 10.11.2024).

Merzlyakov VG, Derevyashkin IV, Boykova IE, Tolmachev AI. Coal and Rock Fracturing by High-Velocity Water Jets. *MIAB. Mining Informational and Analytical Bulletin.* 2023;(4):140-156. URL: https://giab-online.ru/files/Data/2023/4/04_2023_140-156.pdf (accessed: 10.11.2024).

4. Очеретяный С.А., Прокофьев В.В. Влияние параметров кавитатора и сопла на эффективность работы генератора импульсных струй. *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2023;(5):10–24. https://doi.org/10.31857/S1024708422600981

Ocheretyanyi SA, Prokofiev VV. Effect of Cavitator and Nozzle Parameters on the Efficiency Job of the Impulse Jet Generator. *Fluid Dynamics*. 2023;(5):10–24. https://doi.org/10.31857/S1024708422600981

5. Зуйкова З.Г. *Вариационная задача о втекании сжимаемой жидкости в сужающийся канал.* Дис. канд. физ.-мат. наук. Донецк: ДонГУ; 1984. 84 с.

Zuikova ZG. *Variational Problem of the Inflow of a Compressible Fluid into a Narrowing Channel*. Cand.Sci. (Phys.-Math.), diss. Donetsk: DonSU; 1984. 84 p. (In Russ.)

6. Зубов В.И., Зуйкова З.Г. Об одном классе решений задачи оптимизации сопла гидропушки. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1994;34(10):1541–1550. URL: https://www.mathnet.ru/links/ef53959cbfdf54e2c020c950fae97778/zvmmf2511.pdf (дата обращения: 10.11.2024).

Zubov VI, Zuikova ZG. A Class of Solutions to the Problem of Optimizing the Nozzle of a Water Cannon. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1994;34(10):1541–1550.

7. Atanov GA. The Optimal Control Problem of Profiling the Hydro-Cannon Nozzle to Obtain the Maximum Outlet Speed. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C.* 1997;211(7):541–547.

8. Tolstykh VK. Algorithms for Optimizing Systems with Multiple Extremum Functionals. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2024;64(3):392–400. https://doi.org/10.1134/S0965542524030163

9. Кабанихин С.И. Обратные задачи естествознания. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2020;60(6):935–938. https://doi.org/10.31857/S0044466920060046

Kabanikhin SI. Inverse Problems of Natural Science. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2020;60:911–914. https://doi.org/10.1134/S0965542520060044

10. Артемьева Л.А., Дряженков А.А., Потапов М.М. Устойчивое решение задачи квадратичной минимизации с неравномерно возмущенным оператором регуляризованным градиентным методом. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2022;62(1):12–22. https://doi.org/10.31857/S0044466922010033

Artemyeva LA, Dryazhenkov AA, Potapov MM. Stable Solution of the Quadratic Minimization Problem with a Nonuniformly Perturbed Operator by the Regularized Gradient Method. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2022;62(1):12–22. https://doi.org/10.31857/S0044466922010033

11. Семко А.Н., Локтюшина Ю.В. Об учёте сжимаемости жидкости при расчёте течения в гидропушке. *Вестник Донецкого национального университета*. 2011;(2):95–101. URL: https://donnu.ru/public/journals/files/Vestnik_DonNU_2011_N2_compr.pdf#page=96 (дата обращения: 10.11.2024).

Semko AN, Loktyushina JV. About Compressibility of a Liquid at Current Calculation in the Hydrocannon. *Bulletin of Donetsk National University.* 2011;(2):95–101. URL: https://donnu.ru/public/journals/files/Vestnik_DonNU_2011_N2_compr.pdf#page=96 (accessed: 10.11.2024).

12. Гусев А.А. *Основы гидравлики*, 3-е изд., испр. и доп. Москва: Юрайт, 2019. 218 с. https://urait.ru/index.php/bcode/423733

Gusev AA. *Fundamentals of Hydraulics*, 3rd rev. and enl. ed. Moscow: Urait; 2019. 218 p. (In Russ.)

13. Корпусов М.О., Панин А.А. *Лекции по линейному и нелинейному функциональному анализу. Том III. Нелинейный анализ*. Москва: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова; 2016. 235 с.

Korpusov MO, Panin AA. *Lectures on Linear and Nonlinear Functional Analysis. Vol. III. Nonlinear Analysis*. Moscow: Lomonosov Moscow State University; 2016. 235 p. (In Russ.)

14. Емельянов В.Н. *Численные методы: введение в теорию разностных схем.* Москва: Юрайт; 2023. 188 с. https://urait.ru/bcode/562837 (дата обращения: 10.11.2024).

Emelyanov VN. *Numerical Methods: Introduction to the Theory of Difference Schemes*. Moscow: Urait; 2023. 188 p. (In Russ.)

15. Семко А.Н. *Импульсные струи жидкости высокой скорости и их применение.* Донецк: Донецкий национальный университет; 2014. 370 с.

Semko AN. *High Velocity Pulsed Liquid Jets and Their Application*. Donetsk: DonNU; 2014. 370 p. (In Russ.)

Об авторах:

Виктор Константинович Толстых, доктор физико-математических наук, доктор технических наук, профессор кафедры компьютерных технологий Донецкого государственного университета (283001, Донецкая Народная Республика, г. Донецк, ул. Университетская, д. 24), SPIN-код, ORCID, Scopus, ResearcherID, mail@tolstykh.com

Юлия Владимировна Дмитрук, старший преподаватель кафедры общей физики и дидактики физики Донецкого государственного университета (283001, Донецкая Народная Республика, г. Донецк, ул. Университетская, д. 24), SPIN-код, ORCID, loktyushina.julia@yandex.ru

Заявленный вклад авторов:

В.К. Толстых: разработка концепции, научное руководство.

Ю.В. Дмитрук: визуализация, написание черновика рукописи.

Конфликт интересов: **авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Victor K. Tolstykh, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Computer Technology Department, Donetsk State University (24, Universitetskaya Str., Donetsk, 283001, Donetsk People's Republic), SPIN-code, ORCID, Scopus, ResearcherID, mail@tolstykh.com

Yuliia V. Dmitruk, Senior Lecturer of the Department of General Physics and Didactics of Physics, Donetsk State University (24, Universitetskaya Str., Donetsk, 283001, Donetsk People's Republic), SPIN-code, ORCID, loktyushina.julia@yandex.ru

Claimed Contributorship:
VK Tolstykh: conceptualization, supervision.
YV Dmitruk: visualization, writing — original draft preparation.

Conflict of Interest Statement: **the authors do not have any conflict of interest.**

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 20.12.2024
Поступила после рецензирования / Reviewed 17.01.2025
Принята к публикации / Accepted 20.01.2025